Étude de la suite des noyaux des itérés d'un endomorphisme

Notations valables pour le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- Si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{Im}(f)$ désigne son image et $\mathrm{Ker}(f)$ son noyau.
- On pose $f^0 = Id$ et, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on pose $f^k = f \circ f^{k-1}$.

Partie A.

Le but de cette partie est de démontrer que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$, il existe un entier naturel p qui vérifie :

$$(*) \quad \begin{cases} 1 \leq p \leq n \\ n = \dim \mathrm{Ker}\,(f^p) + \dim \mathrm{Im}\,(f^p) \end{cases}$$

1. Dans cette question, f est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$. Donner une valeur de p satisfaisant $(*)$. Justifier la réponse.
2. **Exemple 1.**
   Dans cette question $n = 3$. On muni $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice :
   $$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$. Peut-on choisir $p = 1$?
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f^2)$ et une base de $\mathrm{Im}\,(f^2)$. Peut-on choisir $p = 2$?
3. **Exemple 2.**
   Dans cette question $n = 4$. On muni $\mathbb{R}^4$ de sa base canonique $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_4)$, m est un paramètre réel et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice :
   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$. Peut-on choisir $p = 1$? On discutera suivant les valeurs de m.
   (b) Déterminer le plus petit entier p vérifiant $(*)$.
4. **Etude du cas général.**
   Dans cette question on suppose que f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.
   (a) Soit k un entier naturel. Justifier les inclusions :
   $$\begin{array}{ll} (i) & \mathrm{Ker}\left(f^k\right) \subset \mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right) \\ (ii) & \mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right) \subset \mathrm{Im}\left(f^k\right) \end{array}$$
   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note a_k la dimension de $\mathrm{Ker}\left(f^k\right)$. Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Soit F l'ensemble des antiers naturels k tels que $a_k = a_{k+1}$. Montrer que F est un ensemble non vide.

(d) En déduire l'existence d'un entier p, supérieur ou égal à 1, qui vérifie les deux conditions :

- pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq p-1$, on a : $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \neq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$
- $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à p, on a : $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \operatorname{Ker}\left(f^p\right)$.

(e) Déduire de ce qui précède l'égalité $n = \dim \operatorname{Ker}\left(f^p\right) + \dim \operatorname{Im}\left(f^p\right)$.

Partie B.

Dans cette partie, on étudie deux cas particuliers. p désigne le plus petit entier vérifiant $(*)$ *et on admet que c'est celui qui a été obtenu en A.4..*

1. (a) On suppose $p = n$. Montrer que f^n est l'endomorphisme nul. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f$?

   (b) *Un exemple.*
   Dans cette question $n = 3$; $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ et f est l'endomorphisme représenté dans cette base par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer une base $(\overrightarrow{\epsilon}_1, \overrightarrow{\epsilon}_2, \overrightarrow{\epsilon}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$f\left(\overrightarrow{\epsilon}_1\right) = \overrightarrow{0}, \qquad f\left(\overrightarrow{\epsilon}_2\right) = \overrightarrow{\epsilon}_1, \qquad f\left(\overrightarrow{\epsilon}_3\right) = \overrightarrow{\epsilon}_2.$$

   Ecrire la matrice de f dans cette base et vérifier que $p = 3$.

2. On suppose ici que p est supérieur ou égal à 2 et que l'on a de plus : $\operatorname{Ker}\left(f^p\right) = \mathbb{R}^3$.

   (a) Montrer que pour tout entier k vérifiant : $0 \leq k \leq p-1$, on peut compléter par au moins un vecteur une base de $\operatorname{Ker}\left(f^k\right)$ en une base de $\operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$.

   (b) En déduire l'existence d'une base de $\mathbb{E}$ dans laquelle f est représentée par une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes de la diagonale sont nuls.

   (c) On reprend l'exemple 2. de la partie A. avec $m = 0$. Déterminer, par permutation des vecteurs $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$ et $\overrightarrow{e}_4$, une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme asocié a les propriétés définies à la question précédente.