Polynomes et dérivabilité : Étude des dérivées n$^{\text{èmes}}$ d'une fonction

On admettra le théorème suivant :

Théorème de Rolle généralisé :

Soit $a > 0$.

(i) Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a).$$

Il existe alors $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

(ii) Soit $f :]-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]-\infty, a]$, dérivable sur $]-\infty, a[$ et telle que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(a).$$

Il existe alors $c \in]-\infty, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

On note f la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

1. (a) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donner f' et f''.

   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations $f'(x) = 0$ et $f''(x) = 0$.

2. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{array}{l} P_0 = 1 \\ P_1 = -2X \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = (X^2+1)P_n' - 2(n+1)XP_n \end{array}$$

   (a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant et le degré de P_n.

   (b) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les limites (si elles existent)

$$\lim_{x \to +\infty} f^{(n)}(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f^{(n)}(x).$$

   (b) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$f^{(n)} \text{ s'annule en exactement } n \text{ réels distincts de } \mathbb{R}.$$

   (On utlisera le théorème de Rolle généralisé)

4. On suppose dans la suite que $n = 4$.
   (a) Etablir que :
   $$P_4(X) = \frac{4!}{2i}\big((X+i)^5 - (X-i)^5\big).$$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$.
   (c) En déduire les racines du polynômes P_4.