Polynômes et fonctions usuelles : les polynômes de Tchebychev

Dans ce problème, on étudie la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$, définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Pour tout nombre complexe z, on pose $ch(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ et $sh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$. Si P est un polynôme non nul, alors $deg(P)$ désigne son degré.

1. (a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ ch^2(z) - sh^2(z) = 1$.
   (b) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{C},\ ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$.
   (c) Lorsque $x \in \mathbb{R}$ que vaut $ch(ix)$ et que vaut $sh(ix)$?
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ T_n(ch(z)) = ch(nz)$.
2. (a) Calculer T_2 et T_3.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \in \mathbb{R}[X]$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ deg(T_n) = n$ et calculer son coefficient dominant.
   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$. Que peut-on en déduire sur le polynôme T_n ?
   (e) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $T_n(1)$. Faire de même avec $T_n(0)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (b) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
   $$T_n(\cos\theta) = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (\cos\theta^2 - 1)^k \cos^{n-2k}\theta.$$
   (c) Montrer que
   $$T_n(X) = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$$
   .
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$, d'inconnu θ réel. Donner les solutions qui sont dans l'intervalle $]0, \pi[$.
   (b) En déduire que T_n admet n racines simples (que l'on précisera).
   (c) Factoriser le polynôme T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Calculer le produit des racines de T_n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = \frac{\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x-i\sqrt{1-x^2}\right)^n}{2}$.
   (b) Montrer que ch définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. On note $argch$ sa bijection réciproque. Donner l'expression de $argch(y)$, pour $y \geq 1$.
   (c) Montrer que $\forall x \geq 1,\ T_n(x) = ch(n\, argch(x))$.
   (d) En déduire que :
   $$\forall x \geq 1,\ T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}.$$
   (e) Montrer que la formule ci-dessus reste valable pour $x \leq -1$.
   (f) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geq 1$ alors $|T_n(x)| \geq 1$.