Probabilités et réduction matricielle : les souris de laboratoire

Partie I - Puissances de A

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice P est inversible, déterminer P^{-1}.
2. Déterminer les réels λ tels que la matrice $(A - \lambda I_3)$ ne soit pas inversible.
3. (a) Montrer que : $P^{-1}AP = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Soit k un entier naturel, calculer N^k et $D^k N$.
   (c) En déduire : $(P^{-1}AP)^n = (2^n - 1)N + D$ si n est un entier impair
   Et $(P^{-1}AP)^n = (2^n - 1)N + I_3$ si n est un entier pair.
4. Calculer PDP^{-1} et PNP^{-1}. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & 2^n - 1 \\ \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Partie II - Aplication

Des étudiants s'intéressant au comportement des souris ont mis au point le protocole suivant. Ils placent une souris dans une boite comportant trois issues, une issue E très éclairée, une issue F éclairée par la lumière du jour et dégageant un air frais et enfin une issue G éclairée elle aussi par la lumière du jour mais donnant sur un morceau de gruyère appétissant. Après que la souris ait choisi son issue, les étudiants la remettent au centre de la boite, puis ils répètent l'expérience. Ils ont observé les résultats suivants : Lorsque la souris a choisi la sortie E, elle sort la fois suivante en F ou G avec la même probabilité. Lorsqu'elle a choisi la sortie F, elle sort la fois suivante en E ou G avec la même probabilité. Lorsqu'elle a choisi la sortie G, elle la choisit de nouveau systématiquement la fois suivante. Aujourd'hui les étudiant effectuent leurs expériences trente fois devant leur professeur. A la première étape la souris est sortie par l'issue E, c'est à dire $e_1 = 1$, avec les notations ci-dessous.

On note les événements :
E_n : la souris choisit la sortie E à la n^{eme} étape, et $e_n = \mathbb{P}(E_n)$,
F_n : la souris choisit la sortie F à la n^{eme} étape, et $f_n = \mathbb{P}(F_n)$,
G_n : la souris choisit la sortie G à la n^{eme} étape, et $g_n = \mathbb{P}(G_n)$,
ceci pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Déterminer e_2, f_2 et g_2.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice C telle que : $\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} e_{n+1} \\ f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \end{pmatrix}$.
   Exprimer C en fonction de la matrice A de la partie I.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \end{pmatrix} = C^{n-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}$
3. En utilisant la partie I, donner l'expression de e_n, f_n et g_n, en fonction de n.