Étude d'un dépassement de seuil

On dispose d'une urne contenant deux boules, l'une numérotée 1, l'autre 2. On effectue, dans cette urne, une succession de tirages au hasard d'une boule, en notant le numéro obtenu, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro tiré au rang n. On a donc : $\mathbb{P}\big(X_n = 1\big) = \mathbb{P}\big(X_n = 2\big) = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$; S_n désigne donc la somme des numéros obtenus au cours des n premiers tirages.

Pour $N \in \mathbb{N}$ donné, on considère la variable aléatoire T_N égale au rang n où, *pour la première fois*, on a $S_n > N$. Par exemple si $N = 5$ et si les premiers numéros tirés sont 2, 1, 2, 1, 1, ... alors T_5 prend la valeur 4. De même, toujours si $N = 5$, si les premiers numéros tirés sont 2, 2, 2, 1, 2, ... alors T_5 prend la valeur 3.

Partie I : Préliminaire

1. On considère la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = \frac{5}{6}$, $v_2 = \frac{11}{12}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{1}{2}\left(v_{n+1} + v_n\right)$. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$v_n = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
2. On considère la suite réelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_1 = \frac{3}{2}$, $w_2 = \frac{9}{4}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \frac{1}{2}\left(w_{n+1} + w_n\right) + 1$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $v_n = w_n - \frac{2n}{3}$, vérifie les hypothèses de la question précédente et en déduire la valeur de w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II : Etude de la loi de T_N

1. **Exemples**
   (a) Déterminer les lois de T_1 et T_2 ainsi que leurs espérances et variances (*l'utilisation d'un arbre est vivement recommandée*).
   (b) Déterminer $T_5(\Omega)$.
   (c) Donner dans un tableau les probabilités $\mathbb{P}\big(T_5 = i, X_1 = j\big)$ pour $i \in [\![3, 6]\!]$ et $j \in \{1, 2\}$.
   On montrera en particulier que : $\mathbb{P}\big(T_5 = 5, X_1 = 2\big) = \frac{1}{16}$ et $\mathbb{P}\big(T_5 = 4, X_1 = 1\big) = \frac{1}{4}$.
   (d) Déterminer la loi de T_5, calculer son espérance et sa variance.
2. **Calcul de l'espérance de T_N**
   On revient au cas général où $N \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer la plus petite et la plus grande valeur de T_N dans le cas où N est pair. Même question dans le cas où N est impair.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En conditionnant par rapport au résultat du premier tirage, justifier l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}\big(T_{N+2} = k\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\big(T_{N+1} = k-1\big) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\big(T_N = k-1\big)$$

(c) Vérifier les égalités (on justifiera soigneusement les bornes des sommes) :

$$\mathbb{E}(T_{N+2}) = \sum_{k=1}^{N+3} k\mathbb{P}\big(T_{N+2} = k\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T_N) = \sum_{k=1}^{N+2} k\mathbb{P}\big(T_N = k\big)$$

Prouver ensuite l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{N+3} k\mathbb{P}\big(T_N = k-1\big) = \mathbb{E}(T_N) + 1$$

En déduire l'égalité :

$$\mathbb{E}(T_{N+2}) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}(T_{N+1}) + \mathbb{E}(T_N)\Big) + 1$$

(d) A l'aide du préliminaire, montrer que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{E}(T_N) = \frac{6N+8}{9} + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^N$$

Quelle est la limite de la suite de terme général $\frac{\mathbb{E}(T_N)}{N}$? Pour quelle raison ce résultat est-il plausible ?