Deux jetons et deux cases

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettres a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

A la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :
• si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case
• si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case
• si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ l'évènement : "le jeton A se trouve dans C_0 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération" et $\mathcal{B}_n$ l'évènement : "le jeton A se trouve dans C_1 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération".

Partie I : Préliminaire

Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} 4^{k-1} = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$$

Partie II : Simulation

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note J_n l'évènement : "à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, le jeton A n'a **jamais** quitté la case C_0".
   (a) Exprimer les évènements J_0, J_1, J_2 et J_3 en fonction des évènements $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$, $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(J_0)$, $\mathbb{P}(J_1)$, $\mathbb{P}(J_2)$ et $\mathbb{P}(J_3)$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(J_n)$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse à l'évènement D_k : "à l'issue de la $k^{\text{ième}}$ opération, le jeton A revient pour la **première fois** dans C_0" et on pose $D_0 = \emptyset$.
   (a) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(D_0)$, $\mathbb{P}(D_1)$, $\mathbb{P}(D_2)$, $\mathbb{P}(D_3)$ et $\mathbb{P}(D_4)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'évènement D_n en fonction des évènements $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$, $k \in \mathbb{N}$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}(D_n)$.
3. on considère les trois matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Monter que P est inversible, déterminer P^{-1}, puis vérifier que $M = PDP^{-1}$.
   (b) En déduire l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(\mathcal{A}_n) \\ \mathbb{P}(\mathcal{B}_n) \end{pmatrix}$.
   (a) Donner l'énoncé général de la formule des probabilités totales. En déduire une matrice Q telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = QX_n$.
   (b) Exprimer Q en fonction de M. En déduire Q^n puis X_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer $\mathbb{P}(\mathcal{A}_n)$ et $\mathbb{P}(\mathcal{B}_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{B}_n)$. Interprétation ?

Partie III : Etude d'un mouvement du couple de jetons (A, B)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on décrit la position des jetons A et B, en posant :
• $E_n =$ "à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A et B se trouve tous les deux dans C_0,
• $F_n =$ "à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A se trouve dans C_0 et B dans C_1,
• $G_n =$ "à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A se trouve dans C_1 et B dans C_0,
• $H_n =$ "à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, les deux jetons A et B se trouvent dans C_1.

On pose aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(E_0)$, $\mathbb{P}(F_0)$, $\mathbb{P}(G_0)$, $\mathbb{P}(H_0)$ puis $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(F_1)$, $\mathbb{P}(G_1)$ et $\mathbb{P}(H_1)$.
2. Déterminer une matrice R telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_{n+1} = RW_n$.
3. On considère les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer les matrices UV, VU, U^2, V^2.
   (b) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$: $U^k V = U^k$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $U^k V^r = U^k$. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U^n = 4^{n-1} U$.
   (d) En utilisant le préliminaire, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(U - V)^n = \frac{1}{4}\big(3^n - (-1)^n\big)U + (-1)^n V^n$$

4. (a) Exprimer R en fonction de $U - V$. En déduire l'expression des matrices R^{2n} et R^{2n+1} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(E_{2n})$, $\mathbb{P}(F_{2n})$, $\mathbb{P}(G_{2n})$, $\mathbb{P}(H_{2n})$ et $\mathbb{P}(E_{2n+1})$, $\mathbb{P}(F_{2n+1})$, $\mathbb{P}(G_{2n+1})$, $\mathbb{P}(H_{2n+1})$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.