Probabilités : Modèle de Galton-Watson

Objectifs.
L'objectif est l'étude de l'efficacité d'un traitement T destiné à éradiquer une population de cellules indésirables. Pour tester T, on agit comme suit :

1) On prélève une unique cellule C_0 à laquelle on applique le traitement T, ce qui a pour effet de partager C_0 en un nombre entier naturel aléatoire D_1 de cellule(s) identique(s) à C_0 qu'on appellera enfant(s) de C_0, ou encore descendants de première génération de C_0, lorsque $D_1 > 0$. Si $D_1 = 0$ (ce que l'on souhaite) le traitement est terminé.

2) Lorsque C_0 a k enfant(s) avec $k \geqslant 1$, on leur applique à chacun le traitement T et leur comportement sera la même que celui de C_0 et ceci indépendamment les uns des autres lorsque $k > 1$.

3) A l'issue de la deuxième étape, on obtiendra un nombre entier naturel aléatoire D_2 de descendant(s) de deuxième génération. Si $D_2 = 0$, on s'arrête, sinon, on poursuit dans les mêmes conditions et, pour $n \geqslant 1$, on notera D_n le nombre de descendants de n^{eme} génération.

Remarque(*) : les cellules de $(n+1)^{eme}$ génération de C_0 sont celles de la n^{eme} génération de l'ensemble des enfants de C_0.

Notations :

- Par convention $D_0 = 1$.
- On notera $p_k = \mathbb{P}(D_1 = k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (p_k représente donc la probabilité pour une cellule quelconque C d'avoir k enfants, étant entendu qu'on utilisera la même variable pour toutes les cellules sauf en cas d'ambiguité). On suposera évidemment que $0 < p_0 < 1$.
- On notera $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathbb{P}(D_n = 0)$. Lorsque $\lim u_n = 1$, c'est-à-dire lorsque avec probabilité 1 la descendance de C_0 s'éteint au bout d'un nombre fini de générations on dira que le traitement T est efficace.
- On notera $\mathbb{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire réelle X. Pour deux événements A et B avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(A|B)$ désignera la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Partie I - Premier exemple

Dans cette partie on suppose que $D_1(\Omega) = \{0, 1\}$. On a donc $p_0 > 0$, $p_1 > 0$ et $p_0 + p_1 = 1$.

1. (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Montrer que s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $D_n = 0$, alors pour tout entier $k \geqslant 0$, $D_{n+k} = 0$.
2. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = 0)p_0 + \mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = 1)p_1,$$
   puis en utilisant la remarque (*), montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = 1) = u_n,$$
   et enfin que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = p_0 + p_1 u_n$.
   (b) En posant $v_n = 1 - u_n$, montrer que $u_n = 1 - p_1^n$. Le traitement est-il eficace ?

Partie II - Deuxième exemple

Dans cette partie on suppose que $D_1(\Omega) \subset \{0,1,2\}$ et que $p_0 > 0$, $p_2 > 0$ et $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

1. Montrer que
$$\forall k \in \{0,1,2\}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = k) = u_n^k.$$
On utilisera notamment la remarque (*). En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = k) p_k = p_0 + p_1 u_n + p_2 u_n^2.$$
2. Montrer que s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $D_n = 0$, alors pour tout entier $k \geqslant 0$, $D_{n+k} = 0$.
3. Soit f la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$x \longmapsto f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2.$$
   (a) Vérifier que $f > 0$, $f' \geqslant 0$, $f'' > 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1 - p_0 + p_2$.
   (b) Représenter la graphe de f dans les trois cas suivants : $f'(1) < 1$, $f'(1) = 1$ et $f'(1) > 1$ (on choisira ds valeurs simples de p_0, p_1, p_2 pour chaque cas).
   (c) Vérifier par le calcul que :
      i. pour $f'(1) \leqslant 1$, le graphe de f est au-dessus de la première bissectrice $\Delta : (y = x)$;
      ii. pour $f'(1) = 1$, le graphe est tangent à Δ au point $I(1,1)$;
      iii. pour $f'(1) > 1$, le graphe recoupe la première bissectrice au point $L\left(\frac{p_0}{p_2}, \frac{p_0}{p_2}\right)$.
   (d) Montrer que la suite de terme général u_n est strictement croissante et majorée par $\min\left(\frac{p_0}{p_2}, 1\right)$.
   (e) En déduire la limite de la suite de terme général u_n dans les différents cas envisagés. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le traitement T soit efficace.