Histoires d'urne

Les parties sont indépendantes et dans chaque partie l'urne considérée initialement est constituée de 4 boules indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges.

Partie I

On effectue des tirages d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. Soit Y la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

1. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
2. Décrire l'évènement $[Y = 2]$ et calculer $\mathbb{P}(Y = 2)$.
3. Déterminer la loi de Y, son espérance $\mathbb{E}(Y)$ et sa variance $V(Y)$.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête. Exprimer Z en fonction de Y. En déduire la loi de Z, son espérance $\mathbb{E}(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

Partie II

1. On tire simultanément deux boules dans cette urne puis on les remet dans l'urne. Quelle est la probabilité p d'obtenir deux boules rouges ?
2. On effectue maintenant une succession de n tirages simultanés de 2 boules dans cette urne (en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage). Soit N_2 la variable aléatoire égale au nombre de fois où les 2 boules tirées étaient rouges, et N_1 la variable aléatoire égale au nombre de fois où une des deux boules était rouge et l'autre blanche. Enfin N est le nombre total de boules rouges tirées lors de cette expérience.
   (a) Déterminer la loi de N_2. Donner son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de N_1. Donner son espérance et sa variance.
   (c) Donner une relation entre N, N_1 et N_2. En déduire l'espérance de N.
   (d) Donner une relation entre n, N_1 et N_2. En déduire la covariance de N_1 et N_2 puis la variance de N.