Probabilités : Nombre de changements dans le jeu de pile ou face

Un joueur lance 100 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
Soit $N \in [\![2,100]\!]$. On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de fois, au cours des N premiers lancers, que deux résultats consécutifs ont été différents. X_N est donc égale au nombre de "changements" au cours des N premiers lancers.

Exemple : si l'on a obtenu au cours des 9 premiers lancers "PPFPFFFPP" alors la variable aléatoire X_9 prend la valeur 4. En effet il y a eu 4 changements : au 3^{eme}, 4^{eme}, 5^{eme} et 8^{eme} lancers.

1. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$.
2. Déterminer la loi de X_2, ainsi que son espérance. Déterminer la loi de X_3.
3. Etablir que : $\mathbb{P}(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$.
4. Dans cette question on suppose que $N \in [\![2,99]\!]$. On pose $Y_N = X_{N+1} - X_N$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on a : $\mathbb{P}([Y_N = 0] \cap [X_N = k]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N = k)$.
   (b) En déduire la loi de Y_N et son espérance.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.
   (d) Montrer que les variables X_N et Y_N sont indépendantes.
   (e) Montrer par récurrence sur N que X_N suit la loi $\mathcal{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$. En déduire la valeur de $V(X_N)$.