La ruine du joueur

José va jouer au casino. On note a la fortune de José (en euros, avec $a \in \mathbb{N}^*$) et b la fortune du casino (toujours en euros, avec $b \in \mathbb{N}^*$).
José choisit un jeu du casino, dont les règles sont les suivantes : avec probabilité $p \in]0,1[$ il gagne 1 euro pris au casino, avec probabilité q il perd 1 euro en faveur du casino (on a $q = 1-p$).
Il continue à jouer de manières indépendantes, jusqu'à ce que lui ou le casino soit ruiné (=fortune réduite à zéro) si cela se produit, ou bien indéfiniment.
Dans tout le problème on pose :

$$x = \frac{q}{p}.$$

Partie I : Etude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = p.u_{n+1} + q.u_{n-1}$$

u_0 et u_{a+b} étant deux réels donnés.

1. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$p.\big(u_{n+1} - u_n\big) = q.\big(u_n - u_{n-1}\big)$$
2. Lorsque $p = q$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, a, b, u_0 et u_{a+b}.
3. Lorsque $p \neq q$, montrer qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda + \mu.x^n$$
En déduire l'expression de u_n en fonction de n, a, b, u_0 et u_{a+b}.

Partie II : Etude de la probabilité de voir le jeu s'arrêter

Soit $k \in [\![0, a+b]\!]$. On note E_k l'évènement : "à partir d'une fortune de k euros pour José à un instant donné (et donc $a+b-k$ pour le casino), le jeu s'arrête parce que José est ruiné".
Ainsi $\mathbb{P}\big(E_0\big) = 1$ et $\mathbb{P}\big(E_{a+b}\big) = 0$. De plus $\mathbb{P}\big(E_a\big)$ est la probabilité de ruine de José.

On note aussi A l'évènement : "José perd au premier tour".

1. Etablir que, pour tout $k \in [\![1, a+b-1]\!]$, on a :
$$\mathbb{P}\big(\mathbb{E}_k\big) = q.\mathbb{P}\big(E_{k-1}\big) + p.\mathbb{P}\big(E_{k+1}\big)$$
2. (a) En utilisant les résultats de la partie I, calculez la probabilité $\mathbb{P}\big(E_a\big)$ de voir le jeu se terminer par la ruine de José.
   (b) Expliquer pourquoi on peut supposer que b est infinment grand devant a. Calculez alors la limite de $\mathbb{P}\big(E_a\big)$ lorsque $b \to +\infty$. Interpréter ce résultat lorsque $p \leq q$.
   (c) Pour $p \neq q$, déterminez la limite de $\mathbb{P}\big(E_a\big)$ lorsque $p \to \frac{1}{2}$.
3. Quelle est la probabilité de voir le jeu se terminer par la ruine du casino ?
4. Quelle est la probabilité de voir le jeu se terminer ?

Partie III : Etude du nombre moyen de répétitions du jeu

Pour tout $k \in [\![0, a+b]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de tours qu'il faut effectuer pour ruiner indifféremment le joueur ou le casino, à partir d'une fortune de k euros pour José (et donc $a+b-k$ pour le casino). Si le jeu se répète indéfiniment, on pose $X_k = -1$, et dans ce cas, d'après le dernier résultat de la partie II, on sait que $\mathbb{P}\big(X_k = -1\big) = 0$.

Comme X_k peut éventuellement prendre une infinité de valeurs, on admet qu'elle possède une espérance notée $\mathbb{E}\big(X_k\big)$. Ainsi : $\mathbb{E}\big(X_0\big) = 0$ et $\mathbb{E}\big(X_{a+b}\big) = 0$.

Soit A_1 (resp. B_1) l'évènement "l'expérience se termine parce que le joueur (resp. le casino) est ruiné". On note $\mathbb{P}_{A_1}$ (resp. $\mathbb{P}_{B_1}$) la probabilité conditionnelle sachant A_1 (resp. B_1).

1. Soit $k \in [\![1, a+b-1]\!]$. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$\mathbb{P}_{A_1}\big(X_k = j\big) = q.\mathbb{P}_{A_1}\big(X_{k-1} = j-1\big) + p.\mathbb{P}_{A_1}\big(X_{k+1} = j-1\big)$$
et que :
$$\mathbb{P}_{B_1}\big(X_k = j\big) = q.\mathbb{P}_{B_1}\big(X_{k-1} = j-1\big) + p.\mathbb{P}_{B_1}\big(X_{k+1} = j-1\big)$$
En déduire que :
$$\mathbb{P}\big(X_k = j\big) = q.\mathbb{P}\big(X_{k-1} = j-1\big) + p.\mathbb{P}\big(X_{k+1} = j-1\big)$$
On admettra dans la suite qu'on peut en déduire la relation :
$$\mathbb{E}\big(X_k\big) = 1 + q.\mathbb{E}\big(X_{k-1}\big) + p.\mathbb{E}\big(X_{k+1}\big)$$
2. On suppose dans cette question que $p = q$.
   (a) Déterminer un réel α tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha.k^2$ vérifie :
$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{E}\big(Y_k\big) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\big(Y_{k+1}\big) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\big(Y_{k-1}\big)$$
   (b) En utilisant la partie I, montrer que : $\mathbb{E}\big(X_a\big) = ab$.
3. On suppose dans cette question que $p \neq q$.
   (a) Déterminer un réel β tel que la variable $Z_k = X_k + \beta.k$ vérifie :
$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{E}\big(Z_k\big) = p\mathbb{E}\big(Z_{k+1}\big) + q\mathbb{E}\big(Z_{k-1}\big)$$
   (b) En utilisant la partie I, montrer que :
$$\mathbb{E}\big(X_a\big) = \frac{1}{p-q}\left(\frac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a\right)$$
   (c) Quelle est la limite de $\mathbb{E}\big(X_a\big)$ quand $p \to \frac{1}{2}$? (*Indication : on pourra poser* $x = 1+h$)
   (d) Quelle est la limite de $\mathbb{E}\big(X_a\big)$ quand $b \to +\infty$?