Probabilités et suites récurrentes : les lois de la jungle

Partie I

Les lionnes chassent des gazelles et des zèbres, pour le lion. La population de gazelles et de zèbres est suffisament importante pour que la proportion de chaque espèce reste stable malgré la chasse. La probabilité pour que les lionnes rapportent une gazelle est de $2/3$, celle pour qu'elle rapporte un zèbre est de $1/3$. Les repas du lion ne sont composés que d'une gazelle ou que d'un zèbre, à chaque repas. On suppose que la composition d'un repas est indépendante des repas précédents.

On appelle G l'événement : il a mangé une gazelle au premier repas observé, et Z l'événement : il a mangé un zèbre à ce premier repas.

1. Quelle est la probabilité pour que, lors des deux premiers repas observés, le lion ait mangé deux gazelles (et donc pas de zèbre) ?
2. Quelle est la probabilité pour que, lors des trois premiers repas, le lio ait mangé dans cet ordre un zèbre puis deux gazelles ?
3. Sur les quatre premier repas observés, on considère l'événement E : il a mangé une gazelle deux fois de suite, <u>pour la première fois</u>, aux troisième et quatrième repas.
   Calculer $\mathbb{P}(E|G)$ et $\mathbb{P}(E|Z)$. En déduire $\mathbb{P}(E)$.

Partie II

On observe le lion sur une assez longue période. Pour tout entier $n \geqslant 2$ on note Y_n l'événement : à son n^{eme} repas le lion a, <u>pour la première fois</u>, mangé deux gazelles à deux repas consécutifs. Par exemple, l'événement E (défini en I.3.) est l'événement Y_4.

On note $u_n = \mathbb{P}(Y_n)$ pour tout n, $n \geqslant 2$, et on pose $u_1 = 0$.

1. En utilisant la partie I, préciser u_2, u_3 u_4.
2. Exprimer $\mathbb{P}(Y_{n+2}|G)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+2}|Z)$ à l'aide des termes de la suite (u_n), pour tout n, $n \geqslant 2$.
   En déduire que, pour tout n, $n \geqslant 2$, on a : $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$.
   Vérifier que la relation est encore vraie pour $n = 1$.
   A l'aide de cette même formule, retrouver u_4 obtenu dans la partie I, en utilisant u_2 et u_3.

Partie III

1. Calculer u_n en fonction de n.
2. Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \right) = 1$.
3. On admet que, si $p \in]0, 1[$, alors on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} \right) = \frac{1}{1 - p^2}.$$

   En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} ku_k \right)$.