Probabilités : Tirages avec remise jusqu'à obtention d'un succès

Un sac contient $2n$ cartons numérotés de 1 à $2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Partie I</u> : Un seul tirage

On tire au hasard un carton du sac et on note X la variable aléatoire égale au numéro du carton tiré. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

<u>Partie II</u> : Deux tirages successifs

Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. Un joueur a la possibilité d'effectuer deux tirages dans ce sac avec la stratégie suivante :
- si le premier tirage donne un numéro au moins égal à k, il s'arrête ;
- sinon le carton tiré est remis dans le sac et il effectue un second tirage.

On note Y la variable aléatoire égale au numéro tiré.

1. Montrer que la loi de Y est donnée par

$$\forall j \in [\![1, 2n]\!], \quad \mathbb{P}(Y = j) = \begin{cases} \frac{k-1}{4n^2} & \text{si } j \in [\![1, k-1]\!]. \\ \frac{2n+k-1}{4n^2} & \text{si } j \in [\![k, 2n]\!]. \end{cases}$$

2. (a) Déterminer l'espérance de Y en fonction de k et de n.
   (b) Comparer l'espérance de X et l'espérance de Y.
   (c) Montrer que l'espérance de Y est maximale pour $k = n + 1$.