Le tournoi de Paintball

On considère un tournoi de Paintball entre trois joueurs A, B et C, qui se déroule en une succession d'affrontements de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois joueurs :

• Tous les tirs du tournoi se passent de la même manière et de façons indépendantes.
• Lorsque le joueur A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $2/3$.
• Lorsque le joueur B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/2$.
• Lorsque le joueur C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/3$.
• Lorsque l'un des joueurs est touché, il est définitivement éliminé des affrontements suivants.
• A chaque affrontement, les joueurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés (ainsi, lors du premier affrontement, A vise B tandis que B et C visent A).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les évènements suivants :

ABC_n : « A l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement, A, B et C ne sont pas encore éliminés. »
AB_n : « A l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement, seuls A et B ne sont pas encore éliminés. »
(On définit de façon analogue BC_n et AC_n)
A_n : « A l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement, seuls A n'est pas encore éliminé »
(On définit de façon analogue B_n et C_n)
0_n : « A l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement, A, B et C sont éliminés »

Par convention, ABC_0 est l'évènement certain et AB_0, AC_0, BC_0, A_0, B_0, C_0 et 0_0 l'évènement impossible.

PARTIE I : Le premier affrontement

On désigne par R_A (respectivement R_B et R_C) l'évènement : « A (respectivement B et C) réussit son premier tir ».

1. Calculer $\mathbb{P}(R_B \cup R_C)$.
2. Montrer que la probabilité pour qu'au premier affrontement « A rate son tir » et « B ou C réussissent leur tir » est égal à $2/9$.
3. Déterminer de même la probabilité pour qu'au premier affrontement « A réussisse son tir » et « B ou C réussissent leur tir ».

PARTIE II : Probabilités de transition

1. Montrer que $(ABC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suit décroissante d'évènements, c'est-à-dire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ABC_{n+1} \subset ABC_n$$
En est-il de même des suites $(BC_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(AC_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Expliquer pourquoi C ne peut pas être le dernier a être éliminé. En déduire $\mathbb{P}(AB_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(ABC_{n+1}|ABC_n) = 1/9$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(BC_{n+1}|ABC_n)$ à l'aide de la partie I, puis donner $\mathbb{P}(AC_{n+1}|ABC_n)$.
5. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1}|ABC_n)$, $\mathbb{P}(B_{n+1}|ABC_n)$ et $\mathbb{P}(C_{n+1}|ABC_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1}|AC_n)$, $\mathbb{P}(C_{n+1}|AC_n)$, $\mathbb{P}(AC_{n+1}|AC_n)$, $\mathbb{P}(B_{n+1}|BC_n)$, $\mathbb{P}(C_{n+1}|BC_n)$ et $\mathbb{P}(BC_{n+1}|BC_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Calculer $\mathbb{P}(0_{n+1}|ABC_n)$, $\mathbb{P}(0_{n+1}|BC_n)$ et $\mathbb{P}(0_{n+1}|AC_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie III : Résumé des résultats obtenus

Pour mieux apprécier la cohérence des résultats obtenus, nous vous proposons de les résumer dans le tableau suivant (à reproduire sur la copie) :

V=	0_{n+1}	A_{n+1}	B_{n+1}	C_{n+1}	AB_{n+1}	BC_{n+1}	AC_{n+1}	ABC_{n+1}
$\mathbb{P}\big(V\|ABC_n\big)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathbb{P}\big(V\|AC_n\big)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathbb{P}\big(V\|BC_n\big)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Partie IV : Suite du tournoi

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'évènement : « le tournoi n'est pas terminé à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}\big(U_1\big)$.
   (b) Soit $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}\big(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_n\big)$ à l'aide de la question 3. de la Partie II. En déduire que : $\mathbb{P}\big(ABC_n\big) = \frac{1}{9^n}$.
   (c) Pour $n \geq 2$, on pose $E_{0,n} = AC_1 \cap AC_2 \cap \dots \cap AC_n$ et :
   $$\forall k \in [\![1, n-1]\!]\,, \quad E_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap AC_{k+2} \cap \dots \cap AC_n$$
      i. Peut-on simplifier l'expression de $E_{k,n}$?
      ii. Calculer $\mathbb{P}(E_{k,n})$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
      iii. Exprimer AC_n en fonction des $E_{k,n}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.
      iv. En déduire $\mathbb{P}\big(AC_n\big)$, pour $n \geq 2$.
   (d) Pour $n \geq 2$, on pose maintenant $F_{0,n} = BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$ et :
   $$\forall k \in [\![1, n-1]\!]\,, \quad F_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap BC_{k+2} \cap \dots \cap BC_n$$
      i. Calculer $\mathbb{P}(F_{k,n})$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
      ii. En exprimant BC_n en fonction des $F_{k,n}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}\big(BC_n\big)$ pour $n \geq 2$.
   (e) Exprimer U_n en fonction des évènements ABC_n, AB_n, AC_n et BC_n. En déduire que :
   $$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(U_n) = \frac{1}{3^n} + 2\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n l'évènement : « Le tournoi se termine à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(T_1)$.
   (b) Pour tout $n \geq 2$, exprimer T_n en fonction de U_{n-1} et de U_n.
   (c) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(T_n) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 7\left(\frac{2}{9}\right)^n - 16\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $G_A(n)$ l'évènement : « A gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement ».
   (a) calculer $\mathbb{P}\big(G_A(1)\big)$.
   (b) Pour tout $n \geq 2$, exprimer $G_A(n)$ en fonction de AC_{n-1} et de A_n. En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\big(G_A(n)\big) = 4\left(\frac{2}{9}\right)^n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

4. (a) En s'inspirant de ce qui précède calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que B gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement.
   (b) Déterminer enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que C gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement.