Variables aléatoires de comptage

Dans cet exercice $c \geq 1$ et $n \geq 2$ désignent deux entiers fixés. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernable au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages. On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ définies par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit alors les variables aléatoires $(Z_p)_{2\leq p\leq n}$ par $Z_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

1. Que représente la variable aléatoire Z_p, pour $2 \leq p \leq n$?
2. Donner la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 ainsi que son espérance.
4. Déterminer la loi de Z_2.
5. Déterminer les valeurs prises par Z_p.
6. soit $p \in [\![2, n-1]\!]$.
   (a) Déterminer, pour $k \in Z_p(\Omega)$:
   $$\mathbb{P}_{Z_p=k}\big(X_{p+1} = 1\big)$$
   (b) En déduire que :
   $$\mathbb{P}\big(X_{p+1} = 1\big) = \frac{1 + c\mathbb{E}(Z_p)}{2 + pc}$$
   (c) Démontrer par récurrence forte que, pour tout $p \in [\![2, n-1]\!]$, $X_p \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.