Racines cinquièmes de l'unité

Le but de cet exercice est d'établir des formules permettant d'exprimer $\cos\frac{\pi}{5}$ à l'aide d'un nombre fini de combinaisons de radicaux carrés.

Soit l'équation :

$$(E): \quad z^5 - 1 = 0.$$

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines de (E) sous frme trigonométrique.
2. On va maintenant résoudre (E) par radicaux carrés :
   (a) Déterminer une fonction polynômiale Q telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
   $$z^5 - 1 = (z-1)Q(z).$$
   (b) Déterminer des réels a,b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:
   $$\frac{Q(z)}{z^2} = a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c.$$
   (c) Résoudre, en exprimant les solutions par radicaux carrés, l'équation :
   $$aZ^2 + bZ + c = 0$$
   d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
   (d) Pour finir, résoudre l'équation :
   $$Q(z) = 0$$
   en exprimant les solutions par radicaux carrés, éventuellement superposés.
3. Des questions précédentes, déduire des expressions par radicaux de :
$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \cos\frac{\pi}{5}, \quad \sin\frac{2\pi}{5}, \quad \sin\frac{4\pi}{5} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{5}.$$