Étude du mouvement d'une escadrille de skuas

Le navire océanographique Albert I a observé au début du siècle dernier le mouvement des skuas dans l'antarctique.

Les skuas volent à quelques mètres au-dessus de l'océan pour aller de leur nid sur leur lieu de pêche. Sur leur route est situé un iceberg formant une arche impressionnante.

Les skuas suivent quatre routes possibles :

Le passage A au-dessus de l'iceberg.
Le contournement B par bâbord de l'iceberg.
Le contournement C par tribord de l'iceberg.
Le passage D sous l'arche de l'iceberg.

Les ornithologues du navire océanographique, après plusieurs mois d'observation sur deux mâles Archimède et Cassini et leurs femelles respectives Bérénice et Diane volant en formation, ont observé que le comportement entre leur $n^{ième}$ et leur $(n+1)^{ième}$ passage de l'iceberg est :

"l'escadrille des quatre skuas emprunte le même passage une fois sur quatre ; sinon s'il est passé dessous l'arche alors il passe dessus et inversement, ou s'il est passé par tribord alors il passe par bâbord et inversement."

En notant a_n, b_n, c_n et d_n les probabilités respectives pour que cette escadrille de skuas emprunte les routes A, B, C et D le $n^{ième}$ jour, on admettra (pour cette fois) que

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{lcccc} a_{n+1} = & \frac{1}{4}a_n & & & +\frac{3}{4}d_n \\ b_{n+1} = & & \frac{1}{4}b_n & + \; \frac{3}{4}c_n & \\ c_{n+1} = & & \frac{3}{4}b_n & + \; \frac{1}{4}c_n & \\ d_{n+1} = & \frac{3}{4}a_n & & & +\frac{1}{4}d_n \end{array} \right.$$

Partie A.

1. Montrer que le système (S) peut être écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

   où M est une matrice carrée d'ordre 4.

2. En déduire que le calcul de a_n, b_n, c_n et d_n peut être obtenu à partir de M^n.

Partie B.

Dans cette partie, nous posons $B = M - I$.

1. Vérifier que $M^2 = \frac{1}{2}B + I$, où I désigne la matrice unité d'ordre 4.
2. Montrer qu'il existe une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on déterminera, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = r_n B + I.$$

3. En déduire la valeur de M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et a_0, b_0, c_0 et d_0.

Partie C.

Dans cette partie, nous notons $A = 4M$.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}_0 = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l}\right)$ nous considérons l'endomorphisme φ dont la matrice dans $\mathcal{B}_0$ est A.

1. (a) Donner l'expression analytique de φ.
   (b) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de φ.
   (b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres (les choisir de telle manière que pour chaque vecteur de la base, il y ait deux coordonnées nulles).
3. (a) Démontrer que la réunion de ces bases, notée $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}, \overrightarrow{L}\right)$, est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Donner la matrice C de φ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que la matrice P de la famille de vecteurs $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}_0$. Montrer que P est inversible.
   (c) *On admettra la relation de changement de base : $C = P^{-1}AP$.*
   En déduire A^n en fonction de n et retrouver l'expression de M^n de B.3..

Partie D.

1. Déduire de ce qui précède les valeurs de a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et a_0, b_0, c_0 et d_0.
2. Déterminer, si elles existent, les limites de a_n, b_n, c_n et d_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.