Réduction d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'application

$$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (2x - 3z, -2x + y + 6z, -z) \end{array}$$

<u>Partie I</u> - Etude de l'application f

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base et la dimension de $Im(f)$.
3. Même question pour $Ker(f)$.
4. f est-elle injective, surjective, bijective ?

<u>Partie II</u> - Espaces propres de l'endomorphisme f

Pour tout réel λ, on appelle *sous-espace propre de f associé à λ* l'ensemble

$$E_\lambda = \left\{ u \in \mathbb{R}^3;\ \ f(u) = \lambda u \right\}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les valeurs possibles de $dim\ E_\lambda$?
2. On appelle *spectre de f* l'ensemble

$$Sp(f) = \{\lambda \in \mathbb{R};\ \ dim\ E_\lambda \neq 0\}.$$

   Les éléments de $Sp(f)$ sont appelés *valeurs propres de f*.

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

      i. λ est une valeur propre de f

      ii. il existe $u \in \mathbb{R}^3 - \{O_{\mathbb{R}^3}\}$ tel que $f(u) = \lambda u$

      iii. $dim\ Ker\,(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}) \neq 0$

      iv. $rg\,(f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}) \neq 3$

   <u>Indication</u> : On admettra qu'il suffit de démontrer les quatres implications suivantes

$$i. \Longrightarrow ii. \qquad ii. \Longrightarrow iii. \qquad iii. \Longrightarrow iv. \qquad iv. \Longrightarrow v.$$

   (b) On note $\Pi(X)$ le polynôme $X(X+1)(X+2)$. Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $\Pi(\lambda) = 0$. Que peut-on en déduire sur le cardinal de l'ensemble $Sp(f)$?
   <u>Indications</u> : Poser $g = f^3 + 3f^2 + 2f$. Calculer la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_0$. Ensuite se donner $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = \lambda u$ puis calculer $g(u)$ en fonction de λ et de u. Conclure.

   (c) Déterminer le rang de l'endomorphisme $f - \lambda Id_{\mathbb{R}^3}$ en fonction du paramètre λ. En déduire le spectre de f.

   (d) Donner une base de E_λ pour $\lambda \in \{-1, 1, 2\}$.

Partie III - **Diagonalisation de l'endomorphisme f**

On considère les vecteurs $b_1 = (1, -2, 1)$, $b_2 = (0, 1, 0)$ et $b_3 = (1, -2, 0)$. On note $\mathcal{B}_1$ la famille de vecteurs (b_1, b_2, b_3).

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme $\phi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que : $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \;\; \phi(e_i) = b_i$. Donner la matrice de P de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de ϕ^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. On pose $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ calculer $g(e_i)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3. En déduire la matrice C de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On dit que l'on a *diagonalisé* l'endomorphisme f. Pourquoi ?
5. On note A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Donner une relation entre A, C et P.
   (b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
   (d) Calculer A^{-n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, déterminer l'endomorphisme f^n.

Partie IV - **Somme de sous-espaces vectoriels**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On note $U + V$ l'ensemble :

$$U + V = \{w \in \mathbb{R}^n; \;\; \text{il existe } (u, v) \in U \times V \text{ tel que } w = u + v\}.$$

1. Montrer que $U + V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $U + V$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant U et V.
3. Montrer que si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de U et si $(v_1, \ldots, v_q)$ est une famille génératrice de V alors $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ est une famille génératrice de $U + V$.
4. Montrer que : $dim\, U + V \leqslant dim\, U + dim\, V$.
5. On dira que $\mathbb{R}^n$ est somme directe de U et de V lorsque

   $$\mathbb{R}^n = U + V \qquad \text{et} \qquad U \cap V = \{O_{\mathbb{R}^n}\}.$$

   On le note alors : $\mathbb{R}^n = U \oplus V$.
   (a) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
      i. $\mathbb{R}^n = U \oplus V$
      ii. pour tout $w \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique couple $(u, v) \in U \times V$ tel que $w = u + v$
   (b) Montrer que si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre de U et si $(v_1, \ldots, v_q)$ est une famille libre de V alors $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
   (c) Montrer que la réunion d'une base de U et d'une base de V donne une base de $\mathbb{R}^n$.
   (d) Montrer que : $dim\, U \; + \; dim\, V = n$.
6. Soient U, V et W trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On dira que $\mathbb{R}^n$ est somme directe de U, V et W lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :
   i. $U \cap V = \{O_{\mathbb{R}^n}\}$, $U \cap W = \{O_{\mathbb{R}^n}\}$ et $V \cap W = \{O_{\mathbb{R}^n}\}$
   ii. $dim\, U \; + \; dim\, V + \; dim\, W = n$
   On le note alors : $\mathbb{R}^n = U \oplus V \oplus W$.

   Montrer que :

   $$\mathbb{R}^3 = Ker\,(f + Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus Ker\,(f - Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus Ker\,(f - 2Id_{\mathbb{R}^3}).$$