Résolution des équations du second degré à coefficients complexes

Le but de ce problèmee est de présenter une méthode pour résoudre les équations du second degré à coefficients complexes. Le problème est de trouver un $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$, où Δ représente le discriminant de l'équation (on dira alors que δ est une racine carrée de Δ).

Nous allons donc commencer par donner une méthode permettant de calculer une racine carrée d'une nombre complexe, puis nous en déduirons la résolution dune éuation du second degré à coefficients complexes sur un exemple

PARTIE I :

Soit z_0 un nombre complexe. Il existe x_0, y_0 deux réels uniques tels que $z_0 = x_0 + iy_0$. Nous cherchons à résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = z_0$, d'inconnue z. L'objectif est de déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z. ($z = x + iy$)

1. Supposons que $y_0 = 0$. Donner l'écriture algébrique des solutions en fonction de x_0.
2. Supposons que $y_0 \neq 0$. Nous cherchons les solutions sous forme algébrique $z = x + iy$ avec x et y réels.
   (a) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   $(P1)$ $z = x + iy$ est une racine carrée de z_0.
   $(P2)$ Le couple (x, y) est solution du système : $(S)\ \begin{cases} x^2 - y^2 & = x_0 \\ 2xy & = y_0 \\ x^2 + y^2 & = |z_0|. \end{cases}$
   On a donc prouvé que l'équation $(x + iy)^2 = x_0 + iy_0$ et le système (S) ont les mêmes solutions.
   (b) Montrer que $|z_0| \geqslant x_0$.
   (c) Résoudre le système : $(S_1)\ \begin{cases} x^2 - y^2 & = x_0 \\ x^2 + y^2 & = |z_0|. \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (d) Selon le signe de y_0, déterminer parmi les solutions du système $(S1)$, les solutions du système (S).
3. Trouver à l'aide de cette méthode, l'écriture algébrique des racines carrées des nombres complexes suivants :
   a) $z_1 = i$ *b)* $z_2 = 1 - i$ *c)* $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

PARTIE II :

Résoudre l'équation : $2z^2 - (1 + 5i)z - 2(1 - i) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.