Sommes de sous-espaces vectoriels

Dans tout le problème on se fixe un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{K}$ désignera indifférement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ seront deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

Partie A : Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Définition : Somme de sous-espaces vectoriels

On appelle somme de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$, notée $\mathbb{E}+\mathbb{F}$, l'ensemble

$$\mathbb{E}+\mathbb{F} = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{K}^n;\ \exists \overrightarrow{e} \in \mathbb{E},\ \exists \overrightarrow{f} \in \mathbb{F};\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} \right\}.$$

On a donc, pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{K}^n$,

$$\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}+\mathbb{F} \iff \overrightarrow{x} \text{ s'écrit } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} \text{ avec } \overrightarrow{e} \in \mathbb{E} \text{ et } \overrightarrow{f} \in \mathbb{F}.$$

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{E}+\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, et que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont inclus dans $\mathbb{E}+\mathbb{F}$.
2. Soient $\mathcal{F}$ une famille génératrice de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de $\mathbb{F}$. Montrer que la famille $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est génératrice de $\mathbb{E}+\mathbb{F}$.
3. En déduire que $\dim \big(\mathbb{E}+\mathbb{F}\big) \leq \dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{F}$.

Partie B : Somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Définition : Somme directe de sous-espaces vectoriels

On dit que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont en somme directe lorsque tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}+\mathbb{F}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}$ où $\overrightarrow{e} \in \mathbb{E}$ et $\overrightarrow{f} \in \mathbb{F}$. Dans ce cas le sous-espace vectoriel $\mathbb{E}+\mathbb{F}$ est noté $\mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$.

1. Démontrer que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont en somme directe si et seulement si $\mathbb{E} \cap \mathbb{F} = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.
2. On suppose dans cette question que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont en somme directe.
   (a) Soient $\mathcal{F}$ une base de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{G}$ une base de $\mathbb{F}$. Montrer que la famille $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de $\mathbb{E} \oplus \mathbb{F}$.
   (b) En déduire que : $\dim \big(\mathbb{E} \oplus \mathbb{F}\big) = \dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{F}$.
3. On suppose dans cette question qu'il existe $\mathcal{F}$ une base de $\mathbb{E}$ et $\mathcal{G}$ une base de $\mathbb{F}$ telle que la famille $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ soit une base de $\mathbb{E}+\mathbb{F}$.
   (a) Montrer que si $\overrightarrow{x} \in E \cap \mathbb{F}$, alors $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont en somme directe.
4. On suppose que $\dim \big(\mathbb{E}+\mathbb{F}\big) = \dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{F}$.
   (a) Montrer que si $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{E}$ et si $\mathcal{G}$ est une base de $\mathbb{F}$ alors la famille $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de $\mathbb{E}+\mathbb{F}$.
   (b) En déduire que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont en somme directe.

Partie C : Formule de Grassman.

Dans cette partie on souhaite démontrer la formule de Grassman :

$$\dim \big(\mathbb{E}+\mathbb{F}\big) = \dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{F} - \dim \big(\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\big).$$

1. On se donne $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$. Justifier que l'on peut trouver $\mathcal{F}$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ telle que $\mathcal{B} \cup \mathcal{F}$ soit une base de $\mathbb{E}$, et $\mathcal{G}$ famille de vecteurs de $\mathbb{F}$ telle que $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ soit une base de $\mathbb{F}$
2. Montrer qu'alors $\mathbb{E}+\mathbb{F} = \mathbb{E} \oplus \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$. *(penser à vérifier que la somme est directe)*
3. Conclure que $\mathcal{H} = \mathcal{B} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une base de $\mathbb{E}+\mathbb{F}$, et en déduire la formule de Grassman.