Sommes de sous-espaces vectoriels : cas général et exemple

Soient $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. On définit un sous-ensemble $\mathbb{F}$ de $\mathbb{K}^n$ par :

$$\mathbb{F} = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{K}^n / \ \exists \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathbb{U} \times \mathbb{V} \text{ tels que } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \right\}$$

On a donc, pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{K}^n$:

$$\overrightarrow{x} \in \mathbb{F} \Longleftrightarrow \text{ il existe } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathbb{U} \times \mathbb{V} \text{ tels que } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$\mathbb{F}$ est appelé « somme de $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$ » et est noté $\mathbb{U} + \mathbb{V}$.

Partie I : Propriétés de l'ensemble $\mathbb{F}$

1. Vérifer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. Établir que $\mathbb{F}$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ contenant $\mathbb{U}$ et $\mathbb{V}$.
3. Soient $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ une famille génératrice de $\mathbb{U}$, et $\mathcal{G} = \left(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m}\right)$ une famille génératrice de $\mathbb{V}$. Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{F}$.
4. En déduire que : $\dim(\mathbb{F}) \leqslant \dim(\mathbb{U}) + \dim(\mathbb{V})$.

Partie II : Sommme directe de sous-espaces vectoriels

On dira que $\mathbb{F}$ est somme directe de $\mathbb{U}$ et de $\mathbb{V}$ lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{U} + \mathbb{V}$ et $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Dans ce cas, on le notera : $\mathbb{F} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$.

1. On suppose que $\mathbb{F} = \mathbb{U} + \mathbb{V}$. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :
   (i) $\mathbb{F} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$
   (ii) pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}$, il existe un unique couple $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathbb{U} \times \mathbb{V}$ tel que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
2. On suppose que $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Soient $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{U}$, et $\mathcal{G} = \left(\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m}\right)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{V}$. On pose $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_m}\right)$. Montrer que $\mathcal{H}$ est libre.
3. On suppose que : $\mathbb{F} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$.
   (a) Établir que si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{U}$ et $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{V}$, alors $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{F}$.
   (b) En déduire que : $\dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathbb{U}) + \dim(\mathbb{V})$.

<u>Partie III</u> : Un premier exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $\overrightarrow{v_1} = (-2,0,1)$, $\overrightarrow{v_2} = (-3,1,0)$ et $\overrightarrow{v_3} = (-1,2,-2)$. On pose $\mathbb{U} = \text{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$ et $\mathbb{V} = \text{Vect}\left(\overrightarrow{v_3}\right)$.

1. (a) Déterminer une base, la dimension et un système d'équations cartésiennes de $\mathbb{U}$.
   (b) Même question avec $\mathbb{V}$.
2. (a) Justifier que : $\mathbb{U} + \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} + \mathbb{V}$.
   (c) A-t-on : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$?
3. On pose : $\mathbb{W} = \text{Vect}\left(\overrightarrow{v_1}\right)$. A-t-on :$\mathbb{R}^3 = \mathbb{W} + \mathbb{V}$? (*Utiliser la partie I*)

<u>Partie IV</u> : Un second exemple

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère : $\overrightarrow{u} = (1,\dots,1)$, $\mathbb{U} = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right)$ et $\mathbb{V} = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$.

1. On veut montrer que : $\mathbb{R}^n = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{U} + \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$.
   (b) Soient $\overrightarrow{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
   Montrer qu'il existe $\overrightarrow{v} = (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{V}$ tel que : $\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
   (c) En déduire que : $\mathbb{R}^n = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$.

   (a) Déterminer une base, la dimension et un système d'équations cartésiennes de $\mathbb{U}$.
   (b) A l'aide de la partie II, déterminer la dimension de $\mathbb{V}$.
   (c) Pour $i \in [\![2,n]\!]$, on pose : $\overrightarrow{\epsilon_i} = (1,0,\dots,0,-1,0,\dots,0)$ (la $i^{\text{ème}}$ composante est égale à -1). Vérifier que $\left(\overrightarrow{\epsilon_2},\dots,\overrightarrow{\epsilon_n}\right)$ est une base de $\mathbb{V}$.
2. À l'aide de la partie II, montrer que $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\epsilon_2},\dots,\overrightarrow{\epsilon_n}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{w} = (1,2,3,\dots,n)$ dans cette base.