Sommes et coefficients binomiaux

Partie I : Préliminaires

1. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R}, \quad (q-1)\sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1} - 1.$$

2. Démontrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k.$$

Partie II

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \sum\limits_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $T_n = \sum\limits_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.
   (a) Calculer $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ en fonction de n.
   (b) Exprimer A_n et B_n en fonction de S_n et T_n. En déduire S_n et T_n en fonction de n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Etablir que :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] , \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

   (b) En déduire que :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!] , \quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}.$$

Partie III

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que :

$$(1+x)^{n+1} - 1 = x \sum_{k=0}^{n} (1+x)^k.$$

   (b) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} \right] x^i.$$

(c) En identifiant le coefficient du terme x^i dans le développement du polynôme $(1+x)^{n+1}-1$, montrer que :

$$\forall i \in [\![0,n]\!] \ , \quad \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}.$$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$. Etablir que : $k^2 = 2\binom{k+1}{2} - k$.

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra utiliser III.1.(c)).

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$. Exprimer k^3 en fonction de $\binom{k+1}{3}$ et k.

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.