# Nombres de Fibonacci

Par convention, on pose, pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k \geq n+1 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose alors : $\varphi_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$.

1. Calculez $\varphi_n$, pour $n = 0$, 1, 2, 3, 4 et 5.
2. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\varphi_n + \varphi_{n+1} = \varphi_{n+2}$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

4. En utilisant la formule du binôme, prouver alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_n = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n+1} \binom{n+1}{2p+1} 5^p$$

5. Calculez $\varphi_{11}$.
6. Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi_n^2 - \varphi_{n+1}\varphi_{n-1} = (-1)^n$$