Étude d'une suite réelle

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n - (1-x)^2$$

1. Dans cette question, l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est fixée.
   (a) La fonction f_n est-elle strictement monotone (i.e. strictement croissante ou décroissante) sur $[0,1]$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
   (c) Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$.
2. On considère maintenant la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) A l'aide de la question 1.(c), démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   On notera $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.
   (c) Supposons que $\alpha < 1$.
      i. Montrer qu'alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$.
      On utilisera la formule : $\forall x > 0,\ x^n = e^{n\ln(x)}$
      ii. A l'aide de la relation $f_n(\alpha_n) = 0$, en déduire que $(1-\alpha)^2 = 0$.
   (d) Conclure sur la valeur de α.