Une suite de polynômes

Partie I : Définition, exemples

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose d'étudier les polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients réels vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n} \qquad (*)$$

1. Démontrer que si P_n existe alors il est unique.
2. **Premiers exemples.**
   (a) Justifier que $P_0 = 2$ et $P_1 = X$.
   (b) Développez $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2$ et déduisez-en P_2.
3. Montrer par récurrence à deux pas sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n existe. Montrer aussi que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$
4. **D'autres exemples.**
   (a) Déterminer P_3, P_4 et P_5.
   (b) Déterminer la factorisation de P_5 en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Partie II : Factorisation

1. Conjecturez puis démontrez par récurrence sur $\mathbb{N}$ le degré de P_n. Déterminer aussi son coefficient dominant.
2. Soit $\theta \in]0, \pi[$ un réel fixé.
   (a) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z
$$z + \frac{1}{z} = 2\cos(\theta)$$
   (b) Déduisez-en que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines de P_n et une factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Comparez les deux factorisations de P_5 obtenues précédemment pour en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\cos\frac{3\pi}{10}$.

Partie III : Application à la factorisation des polynômes réciproques

1. Soient a et b deux réels distincts, n'étant pas de la forme $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), et tels que $\cos a \neq \cos b$. On considère le polynôme $T \in \mathbb{C}[X]$ défini par :

$$T(X) = X^4 - 2(\cos a + \cos b)X^3 + 2(1 + 2\cos a \cos b)X^2 - 2(\cos a + \cos b)X + 1.$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^*$

$$T(x) = x^2 Q\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

   où Q est un polynôme que vous déterminerez.

   (b) Déterminez les racines de T.