Étude d'une suite

Le but de ce problème est l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_1 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_{n+1} = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right) \qquad (1)$$

<u>Partie I</u> - Définition de la suite à l'aide d'une suite de fonctions.

1. Prouver que si u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, alors l est nécessairement égale à 0 ou 1.

2. (a) Justifier l'existence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant:

   $$\forall x \geqslant 0,\ \ f_1(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geqslant 0,\ \ f_{n+1}(x) = f_n(x)\left(f_n(x) + \frac{1}{n}\right).$$

   (b) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de f_n et de u_1.

3. (a) En raisonnant par récurrence, justifier les résultats suivants.

   (i) f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (ii) $f_n(0) = 0$.
   (iii) $f_n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   (b) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que, pour tout réel $m > 0$, il existe un unique réel $x > 0$, tel que: $f_n(x) = m$.

<u>Partie II</u> - Etude d'un cas particulier.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir deux réels uniques α_n et β_n par les conditions:

   $$\begin{cases} f_n(\alpha_n) &= 1 - \frac{1}{n} \\ f_n(\beta_n) &= 1 \end{cases}$$

   Justifier, pour $n \geqslant 2$, la relation:

   $$0 < \alpha_n < \beta_n < 1.$$

   On notera respectivement $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de terme général α_n et β_n.

2. (a) Justifier, pour $n \geqslant 1$, les inégalités:

   $$\begin{cases} f_{n+1}(\alpha_n) &< 1 - \frac{1}{n+1} \\ f_{n+1}(\beta_n) &> 1 \end{cases}$$

   (b) En déduire, en utilisant la monotonie de f_{n+1}, que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ strictement décroissante.

(c) Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers L et L' vérifiant:

$$0 < L \leqslant L' < 1.$$

3. On note u^L la suite définie, pour tout $n \geqslant 1$, par la relation:

$$u_n^L = f_n(L).$$

(a) Justifier les inégalités, pour tout $n \geqslant 1$:

$$1 - \frac{1}{n} < f_n(L) \leqslant f_n(L') < 1.$$

En déduire que la suite (u_n^L) converge vers 1 et est strictement croissante.

(b) Montrer que, pour $u_1 \neq L$, le signe de la quantité: $f_n(u_1) - f_n(L)$ est indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier de plus que l'on a:

$$\left|u_n - u_n^L\right| \geqslant |u_1 - L|.$$

(c) En déduire l'égalité: $L = L'$.

<u>Partie III</u> - Nature de la suite suivant le choix de son premier terme.

1. Dans cette question on suppose: $u_1 > L$.

(a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a:

$$\frac{1}{n} + u_n + u_n^L \geqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

(b) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\left(u_{n+1} - u_{n+1}^L\right) \geqslant \frac{3}{2}\left(u_n - u_n^L\right),$$

puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

2. Dans cette question on suppose: $u_1 < L$.

(a) Justifier l'existence d'un entier p tel que l'on ait:

$$u_1 < \alpha_p < L.$$

En déduire qu'on a, pour tout $n \geqslant p$:

$$u_n < 1 - \frac{1}{n}.$$

(b) Montrer qu'à partir du rang p, la suite (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.