Étude d'un couple de suites

On rappelle que les fonctions $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ vérifient:

$$\begin{aligned} &\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b} \\ &\forall (a, y) \in]0, +\infty[, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \\ &\forall (a, x) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, \quad \mathrm{e}^a = x \Longleftrightarrow a = \ln(x) \end{aligned}$$

et aussi que ce sont deux fonctions strictement croissantes sur leur ensemble de définition respectif.

De plus on admettra le résultat suivant:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to +\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0$$

On rappelle aussi le théorème de la bijection: si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I et strictement monotone sur I, alors f est bijective de I sur l'intervalle $f(I)$.

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation: $\mathrm{e}^x = x^n$ que l'on note (E_n). A cet effet, on introduit la fonction f_n définie ainsi:

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = 1 - x^n \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

Partie I - Étude des racines positives de l'équation (E_3)

1. (a) Étudier et représenter sur $[0, +\infty[$ la fonction f_3.

   On donne les valeurs approchées: $\mathrm{e}^2 \simeq 7$*;* $\mathrm{e}^3 \simeq 20,1$*;* $\mathrm{e}^4 \simeq 54,6$ *et* $\mathrm{e}^5 \simeq 148,4$

   (b) En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines réelles positives α et β telles que $1 < \alpha < \beta$, et encadrer chacune d'elles par deux entiers consécutifs.

   (c) Calculer $\ln(\alpha)$ (respectivement $\ln(\beta)$) en fonction de α (respectivement de β).

2. Soit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation $y_{n+1} = 3 \ln(y_n)$ et la valeur initiale y_0, où y_0 est un nombre réel vérifiant $y_0 > \alpha$.

   (a) On suppose que $\alpha < y_0 \leqslant \beta$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha < y_n \leqslant \beta$.

   (b) Montrer que si $\beta \leqslant y_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta \leqslant y_n$.

(c) On se replace dans le cas général: $\alpha < y_0$. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n > \alpha$. Ensuite, pour $n \geqslant 1$, donner le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.

(d) En déduire que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante lorsque $\alpha < y_0 \leqslant \beta$, et décroissante lorsque $\beta \leqslant y_0$.

(e) Étudier enfin la convergence et la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toujours en fonction de la valeur de y_0.

3. On choisit désormais $y_0 = 4$.

(a) Écrire en Matlab un algorithme permettant de calculer la valeur de y_n, pour un entier naturel n donné.

(b) *On admettra que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*:* $0 \leqslant \beta - y_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(\beta - y_n)$.

Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \beta - y_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

(c) Comment choisir n pour que y_n soit une valeur approchée de β à 10^{-5} près?

(d) Écrire en Matlab un algorithme permettant le calcul d'une valeur approchée de β à 10^{-5} près.

Partie II - Étude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geqslant 4$

1. (a) Étudier sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n.

(b) En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.

2. (a) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_{n+1}(u_n)$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \mathrm{e}^{\frac{u_n}{n}}$. En déduire la limite L de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. (a) Déterminer, pou $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(v_n n + 1)$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

5. On pose, pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$.

(a) Montrer que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$. On notera g^{-1} son application réciproque.

(b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(v_n/n) = \ln(n)$, puis en déduire une expression de v_n en fonction de g^{-1} et n.

(c) *On admet que* $\lim\limits_{y\to+\infty} g^{-1}(y) = +\infty$.

Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.