Suites récurrentes linéaires et calcul matriciel

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Dans cette partie on se propose d'étudier un exemple de suite récurrente linéaire d'ordre 3 à l'aide du calcul matriciel.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} v_0 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n \end{cases}$$

1. Elaborer un programme dans le langage de votre choix afin de calculer v_{15} ; indiquer le langage choisi.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On note $J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.
   (a) On pose $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donner sans calcul $rg(R)$. Calculer R^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) On pose $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Donner sans calcul $rg(D)$, en fonction des valeurs des paramètres a et b. Calculer D^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Donner une relation simple entre $J(a,b)$, D et R. En déduire $J(a,b)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour $n \geqslant 2$, on pose : $V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n-1} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall n \geqslant 2, \qquad V_{n+1} = NV_n.$$
   En déduire la valeur de V_n en fonction de V_2 et N.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Montrer que $N = PJ(1,-3)P^{-1}$. En déduire N^n en fonction de P, P^{-1}, $J(1,-3)$ et $n \in \mathbb{N}$.
5. Déduire des résultats des questions 2.(c), 3. et 4.(b) la valeur de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Vérifier à l'aide de votre calculatrice le résultat obtenu dans le cas $n = 15$.

Partie II

Dans cette partie, on propose de redémontrer les formules du cours concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 réelles et de les généraliser au cas complexe. Il est donc interdit d'utiliser toute formule du cours concernant ces suites : tout doit être redémontrer de façon matricielle, en suivant l'énoncé.

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $b \neq 0$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente linaire d'ordre 2 à valeurs complexes, c'est-à-dire une suite définie par

$$\begin{cases} (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant la relation :

$$(M - \alpha I)(M - \beta I) = 0,$$

   où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On pose $Q = M - \beta I$.

   (a) Montrer que : $Q^2 = (\alpha - \beta)Q$. En déduire Q^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (b) On suppose $\alpha \neq \beta$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \beta^{n-k}(\alpha - \beta)^{k-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

   (c) On suppose que $\alpha = \beta$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \beta^{n-k}(\alpha - \beta)^{k-1} = n\alpha^{n-1}.$$

   (d) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra distinguer les cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

2. (a) Pour $n \geqslant 1$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad U_{n+1} = MU_n.$$

   En déduire la valeur de U_n en fonction de U_1 et M.

   (b) Montrer que M satisfait la relation : $M^2 - aM - bI = 0$. On note α et β les racines dans $\mathbb{C}$ de $r^2 - ar - b = 0$. Montrer que : $(M - \alpha I)(M - \beta I) = 0$.

   (c) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.