BCPST1.1 - MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N$^\circ$ 1

Exercice 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 2 Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on pose :

$$A\Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Montrer que : $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

Exercice 3 1. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$; a, b, c, d étant distincts deux à deux.
2. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(E)\right)$ pour un ensemble à deux éléments.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(x) + 2x$. Est-ce que l'application f est injective ? surjective ? bijective ? Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement positive.

Exercice 5 On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

1. Est-elle injective sur $\mathbb{R}$? surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que $f_{|\mathbb{R}^+}$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f^{-1}_{|\mathbb{R}^+}$.
3. De même montrer que $f_{|\mathbb{R}^-}$ est bijective de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f^{-1}_{|\mathbb{R}^-}$.
4. f est-elle injective sur $\mathbb{N}$? bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$? de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$?

Exercice 6 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.
a) Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
b) On suppose que $g \circ f = Id_E$, et que l'une des deux applications f ou g est bijective. Montrer que l'autre est aussi bijective.
c) Monter que si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Exercice 7 Montrer que la composée de deux injections est une injection et que la composée de deux surjections est une surjection.

Exercice 8 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A_1 et A_2 deux parties de E et B_1 et B_2 deux parties de F.
a) Montrer que :

$$f\left(A_1 \cup A_2\right) = f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right) \text{ et } f\left(A_1 \cap A_2\right) \subset f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right).$$

b) Montrer que :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\left(B_1 \cup B_2\right) & = & f^{-1}\left(B_1\right) \cup f^{-1}\left(B_2\right) \text{ et} \\ f^{-1}\left(B_1 \cap B_2\right) & = & f^{-1}\left(B_1\right) \cap f^{-1}\left(B_2\right). \end{array}$$

Exercice 9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ des nombres réels ou complexes.

1. Comparer les expressions S_1 et S_2 : $S_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)$ et $S_2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$. Les représenter dans un tableau.
2. Comparer les expressions T_1 et T_2 : $T_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} x_{ij}\right)$ et $T_2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} x_{ij}\right)$. Les représenter dans un tableau.

Exercice 10 Calculer les sommes suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n} 1, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} j\right), \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j), \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1, \quad \prod_{k=1}^{n} k, \quad \prod_{k=0}^{n}(2k+1).$$

Exercice 11 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

1. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. $n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice 12 Calculer les sommes suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k(-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{2n}{2k}.$$