BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 10

Exercice 1 Peut-on prolonger en 0 les fonction suivantes :

$$1.\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}. \qquad 2.\ g(x) = \frac{x}{2x+|x|}. \qquad 3.\ h(x) = x^x.$$

Exercice 2 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.

1. Calculer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire puis étudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 3 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Exercice 4 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe.

Exercice 5 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{p}\right]; \qquad f\left(x + \frac{1}{p}\right) = f(x).$$

Exercice 6 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que : $\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

1. Montrer que f est continue sur I.
2. On suppose que $0 < k < 1$ et que f a un point fixe l.
   (a) Montrer que ce point fixe est unique.
   (b) On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - l| \leq k^n |x_0 - l|.$$
   En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que la limite de f en $+\infty$ existe et est finie. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée sur $[0, +\infty[$ et que sa borne inférieure est atteinte.
3. On suppose que $f(0) < 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est strictement positive. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8 Soit f définie sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Montrer que f admet une application réciproque continue que l'on explicitera.

Exercice 9 Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes, après les avoir étudiées :

$$1.\ f(x) = \arcsin(\sin(x)). \qquad 2.\ g(x) = \arccos(\cos(x)). \qquad 3.\ h(x) = \arctan(\tan(x)).$$

Exercice 10 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -2\arctan(x) - \pi & \text{si } x < -1 \\ 2\arctan(x) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -2\arctan(x) + \pi & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 11

1. Montrer que $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
2. Discuter en fonction de $t \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = t$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\arcsin(2x) = \arcsin(x) + \arcsin(x\sqrt{2})$.