**BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 11**

**Exercice 1 (Polynômes d'interpolation de Lagrange)**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n+1$ nombres complexes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts, et $n+1$ nombres complexes $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

1. Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, déterminer un polynôme $L_k$ de degré inférieur ou égal à $n$ tel que l'on ait :
$$\begin{cases} L_k(x_j) = 0 & \text{si } j \neq k \\ L_k(x_k) = 1 \end{cases}$$
2. En déduire que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(X)$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall j \in [\![0, n]\!] , \quad P(x_j) = y_j.$$

**Exercice 2** On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de $P_n$.
2. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $P_n(\cos x) = \cos(nx)$.
3. En déduire les racines de $P_n$.

**Exercice 3** On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = -2X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de $P_n$.
2. Déterminer le terme constant de $P_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la parité de $P_n$.

**Exercice 4** Factoriser les polynômes suivants :

1. $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Faire de même pour $X^8 + X^4 + 1$.
3. $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
4. $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que $i + 1$ est racine dans $\mathbb{C}[X]$.

**Exercice 5 (Formule de Vandermonde)**
Soient $n$ et $m$ deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Soit $i \in \{0, 1, \ldots, n + M\}$. En exprimant de deux façons différentes le coefficient de $X^i$ dans le polynôme $(1 + X)^n(1 + X)^m$, calculer $\sum\limits_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\ tq \\ k+l=i}} \binom{n}{k}\binom{m}{l}$.

**Exercice 6** Soit $n \geq 2$. On pose $P = (X + 1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de $P$ dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de $P$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On note $Q$ le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = XQ$. A l'aide des racines de $Q$ déterminer la valeur de
$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$