**BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 12**

**Exercice 1**
Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction dérivable sur $I$. Etablir que $f$ et $f'$ sont de parités contraires.

**Exercice 2**

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln x = \frac{1}{x}$.
2. Etablir que : $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.
3. On note $h$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(0) = 0$ et pour tout $x > 0$, $h(x) = x\ln(x)$. Montrer que $h$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et tracer l'allure de son graphe en précisant la tangente au point d'abscisse 1.

**Exercice 3 (Fonctions convexes)**
Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction dérivable sur $I$. On dira que $f$ est convexe sur $I$, lorsque $f'$ est croissante sur $I$. On suppose que $[a, b] \subset I$.

1. Montrer que tout $x \in [a, b]$ s'écrit de manière unique : $x = (1 - t)a + tb$, où $t \in [0, 1]$.
2. Etablir que, pour tout $t \in [0, 1]$ : $f\big((1 - t)a + tb\big) \leq (1 - t)f(a) + tf(b)$. Interprétation graphique ?
3. Montrer que sur $I$ la courbe représentative de $f$ est au-dessus de ses tangentes.
4. On suppose que $f$ est deux fois dérivable sur $I$. Donner une CNS sur $f''$ pour que $f$ soit convexe sur $I$. En déduire des exemples de fonctions convexes.

**Exercice 4**
Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de continuité et son ensemble de dérivabilité, puis calculer la dérivée.

$$1)\ 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad 2)\ \cos\sqrt{1+x^2} \qquad 3)\ \sqrt{|1-x^2|} \qquad 4)\ \ln(|x^2-3x+2|) \qquad 5)\ \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

**Exercice 5**
Etude, variations et courbe représentative de la fonction : $f(x) = \arccos\cos x + \arccos\cos(2x)$.

**Exercice 6**
On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$. Préciser les éventuelles limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
2. Etudier la continuité de $f$ (si possible on effectuera les prolongements usuels aux bornes de $\mathcal{D}_f$).
3. Etudier la dérivabilité de $f$. On précisera l'équation de la tangente aux points remarquables ainsi que la position relative de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$.
4. Dresser le tableau de variations de $f$.
5. Tracer sur un même graphique la courbe $\mathcal{C}_f$, ses asymptotes éventuelles et les tangentes étudiées à la question précédente 3.

**Exercice 7 (Théorème de Rolle en cascade)**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ une fonction $n$ fois dérivable sur $[a, b]$, s'annulant en $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

1. Montrer que $f'$ s'annule au moins $n$ fois sur $]a, b[$.
2. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

**Exercice 8**
Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $f(0) = 0$ et $f'$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Etablir que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} \leq f'(x).$$

En déduire que la fonction $g : x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 9**
Soit $\alpha \in ]0,1[$. Etablir que :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{n^\alpha}.$$

En déduire un équivalent de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

**Exercice 10** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$ Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$