BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 14

Exercice 1 Les familles suivantes sont-elles libres (si oui, on les complètera en une base, et si non, on donnera une combinaison linéaire nulle, dont les coefficients sont non tous nul) ? génératrices de $\mathbb{R}^3$ (si oui, on en extraira une base, si non, on donnera un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonctions des vecteurs de la famille) ? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \Big((2,4,3),(1,5,7)\Big)\\
\mathcal{F}_2 &= \Big((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)\Big)\\
\mathcal{F}_3 &= \Big((9,-3,7),(1,8,8),(5,-5,1)\Big)\\
\mathcal{F}_4 &= \Big((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\Big)\\
\mathcal{F}_5 &= \Big((1,1,0),(2,0,1),(3,1,1),(1,0,2)\Big)
\end{aligned}$$

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, justifier si la partie considérée est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
A &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2-y^2=0\big\}\\
B &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=0\big\}\\
C &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x-y=0\big\}\\
D &= \big\{(a+b,a-b);\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\big\}\\
E &= \{(1+x,x);\ x\in\mathbb{R}\}\\
\mathbb{Z}^2 &= \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Exercice 3 Les sev de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définie de 3 façons différentes :
- Par des équations cartésiennes : $A=\big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x-y+z=0 \text{ et } y-2t=0\big\}$.
- Par un paramétrage : $B=\big\{(2a-3b+c,a+2b-c,-b+c,a);\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\big\}$.
- Par la donnée d'une base (ou d'une famille génératrice) : $C=Vect\Big((1,2,-1,0),(0,1,3,-1)\Big)$.

Ecrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

Exercice 4 On désigne par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$. On considère les parties suivantes de $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{F}=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3;\ x+iy-z=0\big\}\qquad \mathbb{G}=\big\{(a+ib,a-ib,a+b);\ (a,b)\in\mathbb{C}^2\big\}$$

1. Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sev de $\mathbb{E}$. Donner une base pour chacun de ces sev.
2. Donner une équation cartésienne de $\mathbb{G}$.
3. Donner un système d'équations cartésiennes et une base de $\mathbb{H}=\mathbb{F}\cap\mathbb{G}$.
4. Donner une base de $\mathbb{E}$ composée d'un vecteur de $\mathbb{F}$, d'un vecteur de $\mathbb{G}$ et d'un vecteur quelconque.

Exercice 5 Soit $\mathbb{E}=\big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4;\ x+y+z+t=0\big\}$ et $\mathbb{F}=\{(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda);\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.
1. Montrer que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Démontrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de $\mathbb{E}$ et d'un vecteur de $\mathbb{F}$.
3. Déterminer la dimension de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.
4. Démontrer qu'en réunissant une base quelconque de $\mathbb{E}$ avec une base quelconque de $\mathbb{F}$, la famille obtenue est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6 On considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$\mathbb{E} = \text{Vect}\Big((1,-1,3,-3),(2,-2,4,-4),(3,-3,7,-7),(1,-1,1,-1)\Big).$$

1. Donner une base et la dimension de $\mathbb{E}$.
2. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathbb{E}$.
3. Etablir que $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$ où $\mathbb{F}$ est défini par

$$\mathbb{F} = \text{Vect}\Big((1,0,1,-1),(0,1,2,-2),(1,0,0,0),(0,0,-1,1)\Big).$$

Exercice 7 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (-1,1,-1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,2,4)$, $\overrightarrow{v_3} = (3,-1,a)$ et $\overrightarrow{v_4} = (2,3,b)$. Déterminer les réels a et b pour que les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_4}$.

Exercice 8 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{u_2} = (0,1,1)$ et $\overrightarrow{u_3} = (1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \big(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On pose $\overrightarrow{v_1} = (1,2,4)$ et $\overrightarrow{v_2} = (3,-1,0)$. Déterminer $\underset{\mathcal{B}}{\text{Mat}}\big(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\big)$.