BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 15

Exercice 1 Soient $\mathcal{P}$ le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la base canonique de $\mathcal{P}$. On considère f et g deux endomorphismes de $\mathcal{P}$ de matrices respectives $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices de $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$ et donner une base de $\operatorname{Im}(f)$. Donner sans calcul une base de $\operatorname{Im}(g)$.
3. On pose $h = f + g$. Calculer la matrice de $h \circ h$. Conclusion ?

Exercice 2 On note $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{E}$. On note h l'endomorphisme de $\mathbb{E}$ défini par $h(x, y, z) = (-2x + y + 2z, -x + y + z, -2x + y + 2z)$

1. Donner la matrice A de h.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(h)$. Quel est le rang de h ? Donner une base de $\operatorname{Im}(h)$.
3. Déterminer la matrice de $h^2 = h \circ h$. Quel est le rang de h^2 ? son noyau, son image ?
4. Calculer h^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants on définit une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par sa matrice relativement aux bases canoniques. Déterminer $rg(f)$ ainsi qu'une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 9 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 On désigne par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et par $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ la base canonique de $\mathbb{E}$. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ dont la matrice est $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'endomorphisme f est bijectif et donner la matrice de f^{-1}. Que remarque-t-on ?
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{E}$ tels que $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$ est un sev de $\mathbb{E}$. En donner une base.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{E}$ tels que $f\left(\overrightarrow{u}\right) = -\overrightarrow{u}$ est un sev de $\mathbb{E}$. En donner une équation cartésienne.
4. On pose $\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E};\ y + z = 0\}$. Montrer que $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.

Exercice 5 Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$.
3. On suppose que f et g commutent i.e. $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 6 On désigne par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$, où $p \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$ et $\operatorname{Im}\left(f^2\right) \subset \operatorname{Im}(f)$.
2. Montrer que les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

$$(i)\ \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right);$$
$$(ii)\ \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}\left(f^2\right);$$
$$(iii)\ \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}.$$

3. On suppose que l'une de ces trois conditions est vérifiée. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^n)$ et $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^n)$.

Exercice 7 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$. On suppose que $f^3 = O$ et $f^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $\overrightarrow{u} \in \mathbb{K}^3$ tel que la famille $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{u}, f\left(\overrightarrow{u}\right), f^2\left(\overrightarrow{u}\right)\right)$ est libre.
2. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 8 Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^p\right)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id_{\mathbb{K}^p} = 0$.

1. Montrer que f est inversible et donner f^{-1} en fonction de f.
2. Montrer qu'il exite deux suites (a_n) et (b_n) de scalaires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = a_n Id_{\mathbb{K}^p} + b_n f$. En déduire f^n en fonction de n.

Exercice 9

1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$
On pose $\overrightarrow{u_1} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{u_3} = (0, -1, 2)$. Montrer que $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base. Que remarquez-vous ?
2. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
On pose $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, -1)$ et $\overrightarrow{v_3} = (1, -1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de g dans cette base. Que remarquez-vous ?

Exercice 10 Déterminer les éléments propres des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ de matrice respective dans la base canonique :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que, pour chacun de ces endomorphismes, il existe une base formée de vecteurs propres et déterminer leur matrice dans cette base.