BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 17

Exercice 1 Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en aligne 5 au hasard que l'on aligne afin de former un mot de 5 lettres.
   X = nombre de voyelles dans ce mot.
2. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs.
   X = nombre d'objets dans le premier tiroir.
3. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos.
   X = nombre de bosses.
4. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne.
   X = nombre de boules vertes tirées. X = nombre de cartes que l'on a retournées.
5. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques.
   X = nombre de garçons d'une famille de 3 enfants.
6. On forme un jury de 6 personnes choisies au hasard dans un groupe composé de 5 hommes et 4 femmes.
   X = nombre de femmes dans ce jury.
7. On suppose que 1% des trèfles possédent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles.
   X = nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 2 Un jeu est dit *équitable* losque l'espérance du gain relatif du joueur est nulle. Pour chacun des jeux suivants, déterminer si le jeu est équitable.

1. Le joueur lance 2 dès. S'il sort 7, il gagne 5 euros, sinon il perd 1 euro.
2. Le joueur mise sur rouge ou noir à la roulette au casino (composée de 18 rouges, 18 noirs et du zéro qui est vert). Pour une mise donnée, la casino paye deux fois la mise en cas de sortie de la bonne couleur (la mise est perdue dans tous les cas).
3. Toujours à la roulette, il joue un numéro plein : s'il gagne, la casino lui paye 36 fois sa mise en cas de sortie du numéro choisi.
4. Le joueur remplit une grille de loto qui coûte ϵ euros : il choisit 6 numéros entre 1 et 49. Si ses numéros sortent, il gagne un million d'euros.

Exercice 3 On considère une urne de taille $N > 1$, contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. (a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
   (b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
2. Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X. Donner son espérance. Même question dans le cas $r = N$.
3. Le cas général : $1 < r < N$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Soit k l'une de ces valeurs.
      i. Déterminer la probabilité qu'au cours des $k-1$ premiers tirages soient apparus $r-1$ boules blanches.
      ii. Vérifier que :
      $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$
   (c) En déduire les valeurs des sommes : $\sum_{k=r}^{N} \binom{k-1}{r-1}$, puis $\sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r}$ et $\sum_{k=r}^{N} \binom{k+1}{r+1}$.
   (d) Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$.
   (e) Calculer $\mathbb{E}\big(X(X+1)\big)$ et en déduire $V(X)$.

Exercice 4 Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X son espérance et son écart-type.

Exercice 5 Une urne contient $n-1$ boules blanches et une boule noire ($n \geq 1$). On tire successivement et sans remise toutes les boules. On désigne par X le rang du tirage de la boule noire. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 6 Une urne contient $n \geq 1$ boules dont $r \geq 1$ sont rouges et les autres sont blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $x \in \{1, \ldots, r\}$. On appelle X le rang d'apparition de la $x$ème boule rouge. Trouver la loi de X.

Exercice 7 On lance 4 dès équilibrés, on note $X =$"le nombre de numéros différents sortis". Déterminer la loi de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 8 On dispose d'une urne contenant 1000 boules noires et 9000 boules blanches. On tire un échantillon [simultané] de n boules, on note $A_k =$"l'échantillon contient au moins k boules blanches".

1. On suppose $n \leq 10$, on note X le nombre de boules blanches obtenues. Préciser la loi de X et donner une approximation de cette loi.
2. Quelle est la valeur minimale de n pour que $\mathbb{P}(A_1) \geq 0.99$?
3. Quelle est la valeur minimale de n pour que $\mathbb{P}(A_2) \geq 0.99$?

Exercice 9 Une population de 10^9 cellules est soumise à une suite de n scéances d'irradiation. On suppose que chaque cellule a une réaction indépendante et qu'à chaque scéance la probabilité pour qu'une cellule soit tuée est 0.5. Combien de scéances faut-il faire pour que la probabilité d'avoir tué toutes les celule soit supérieures à 0.9 ?