BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 18

Exercice 1 On lance un dè et on note X le numéro obtenu. On choisit alors au hasard avec équiprobabilité un entier Y entre 1 et X.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis la loi de Y.
2. Déterminer la loi de $X_{[Y=2]}$.

Exercice 2 Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $T = U_1 - U_2$ et $V = U_1 + U_2$.

1. Déterminer la loi du couple (T, V).
2. T et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli.

Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 4 On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne $(n < N)$ et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
3. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

Exercice 5 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$.

1. Montrer que $X + Y$ est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n + m, p)$. Interpréter ce résultat.
2. Pour $r \in [\![0, n + m]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = r$.

Exercice 6 On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes numérotées de 1 à n : U_1, U_2, ..., U_n. L'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une urne, on note X le numéro de l'urne choisie, puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie, on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y), en déduire la loi de Y.
2. Déterminer l'espérance de Y.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 7 On dispose d'une urne contenant $n \geq 2$ boules numérotées de 1 à n. Soit Y une variable uniforme à valeurs dans $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Lorsque Y prend la valeur de y, on tire au hasard y boules dans l'urne. On appelle X la somme des numéros tirés. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire définie par $X_k = k$ si la boule numéro k a été tirée et $X_k = 0$ sinon.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la loi de X_k.
3. Justifier que $X = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, en déduire l'espérance de X.

Exercice 8 On dispose d'une arène entourée de n cages numérotées de 1 à n, ainsi que de N souris numérotées de 1 à N. On place les souris au milieu de l'arène et celles-ci se répartissent au hasard, et de manière indépendante, dans les cages.
On note alors Y le nombre de cages vides et X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la cage numéro i est vide et 0 sinon.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i, son espérance et sa variance.
2. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, déterminer $\mathbb{E}(X_i X_j)$ et $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
3. Relier Y aux variables X_i, $1 \leq i \leq n$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ puis $V(Y)$.
4. Déterminer la probabilité qu'aucune cage ne soit vide.

Exercice 9 Soit $X_0, X_1, \ldots, X_N, X_{N+1}$ variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chaque une loi de Bernoulli de même paramètre $p \in]0,1[$.

1. On pose, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, $Y_n = \big(X_n - X_{n+1}\big)^2$. Donner la loi de Y_n.
2. Soit $Z = \sum\limits_{k=1}^{N} Y_k$. Déterminer $V(Z)$.

Exercice 10 (Modèle de Galton-Watson)
Soit $p \in]0,1[$.
On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p, ou à aucun descendant avec la probabilité $1-p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de descendants issus de la $n^{\text{ème}}$ génération, c'est-à-dire le nombre de descendants de notre plante à la $(n+1)^{\text{ème}}$ génération.
On note aussi f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = px^2 + (1-p)$.

a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1-p$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Montrer qu'elle est bien défnie, puis étudier sa monotonie et sa convergence.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 0)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter ce résultat.