BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N$^\circ$ 16

Exercice 1 Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x-3+\frac{1}{x^2} \end{array}$

1. Etudier f et tracer sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.
2. Soit $\lambda > 1$. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations :

$$y = 2x-3, \qquad x = 1 \qquad \text{et} \qquad x = \lambda.$$

3. $\mathcal{A}(\lambda)$ a-t-elle une limite quand $\lambda \to +\infty$?

Reprendre l'exercice avec la fonction $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x-3+\frac{1}{x} \end{array}$

Conclusion ?

Exercice 2 Calculer :

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt.$$

Exercice 3 Soit : $G(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{lnt}{1+t^2}\, dt$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_G$ de G.
2. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_G$.
3. Calculer G'. Conclusion ?

Exercice 4 Soit la fonction $f : x \longmapsto \int_0^{\sin x^2} \arcsin \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos x^2} \arccos \sqrt{t}\, dt$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est π-périodique et paire.
3. Montrer que f est constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et en déduire qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Donner la valeur de cette constante. On commencera par démontrer que :

$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5 On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt.$$

1. Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.
2. En déduire un équivalent de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_0^1 t^n \ln\left(1+t^2\right)\, dt.$$

Exercice 6 Pour $n, p \in \mathbb{N}$ on pose $I_{n,p} = \int_{-1}^1 (1+x)^n(1-x)^p\, dx$. Pour $n \geq 1$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n-1,p+1}$, puis $I_{n,p}$ en fonction de $I_{0,n+p}$, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la valeur de $I_{n,p}$ en fonction de n et p.

Exercice 7 Soit f de classe C^1 sur un segment $[a,b]$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\, dt = 0.$$

Exercice 8 1. En considérant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$ où $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n).$$

3. En déduire que : $S_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 9 1. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}}}$.

2. Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

3. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ x_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! n^n}}$.

Exercice 10 Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

$$\int_0^{\pi/4} \sin^4(x)\cos^3(x)\,dx, \quad \int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx, \quad \int e^{-x}\cos(x)\,dx, \quad \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx,$$
$$\int_0^{\pi/2} xe^x \cos(x)\,dx, \quad \int_0^1 t\arctan(t), dt.$$

Exercice 11 Au moyen du changement de variable indiqué entre parenthèses calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)}$ $(u = \cos(t))$.
2. $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx$ $(u = \tan(x))$.
3. $\int_{1/2}^{2} \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ $(x = 1/t)$.

Exercice 12 Soit $a < b$ deux réels et $f \in C^0([a,b])$. Montrer au moyen d'un changement de variable affine que $\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
Application : calculer $\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$.

Exercice 13 Calculer $I = \int_1^2 \frac{u-1}{2u+1}\,du$ et $J = \int_0^1 \frac{x}{x^2-4x+4}\,dx$. Déterminer les primitives des fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \frac{3x+1}{x^2+x+1}.$$