BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N $^\circ$ 19

Exercice 1 Résoudre les équation différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, on essaiera de deviner une solution proche du second membre, plutot que d'utiliser la méthode de variation de la constante.

1. $y' - e^x y = e^x 3$
2. $y' + y = \cos x + \sin x$
3. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I donné.

1. $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$ sur $I =]1, +\infty[$
2. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $x^2y' - y = (x^2-1)e^x$ sur $I =]-\infty, 0[$
4. $xy' - 2y = x^3$ sur $I =]0, +\infty[$
5. $xy' + y = \arctan x$ sur $I =]0, +\infty[$

Exercice 3 (Equations différentielles linéaires du premier ordre non résolues)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $xy' + (x-1)y = x^2$
2. $xy' - 2y = 1$ et $y(-1) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 4 Résoudre les équations différentielles.

1. $y'' - y = \sin(2x)$ et $y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' + y = \sin(x)$ et $y(0) = y'(0) = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 5e^x$
4. $y'' - 2y' + y = -e^{-x}$
5. $y'' + 4y = \sin^2 x$ et $y(0) = y'(0) = 0$
6. $y'' - 3y' + 2y = x^2 - x + 3$
7. $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}\cos(2x)$

Exercice 5 (Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants)
Résoudre l'équation différentielle $x^2 - 3xy + 2 = 0$ à l'aide du changement de variable $x = e^t$.

Exercice 6 (Equation intégrale)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) = 3x \int_0^x f(t)\, dt.$$

Exercice 7 Soit $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que les solutions de l'équation $y' + y = g$ sont bornées sur $[0, +\infty[$.

Exercice 8 On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *non nulle* deux fois dérivable et satisfaisant la relation :

$$(R) : \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \;\; f(x+t) + f(x-t) = 2f(x)f(t).$$

1. Montrer que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
2. Montrer qu'il existe une constante $k \geq 0$ telle que f satisfait l'équation différentielle $y'' + k^2y = 0$ ou l'équation différentielle $y'' - k^2y = 0$.
3. En déduire toutes les fonctions non nulles qui satisfont (R).