BCPST1.1 - MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N$^\circ$ 2

Exercice 1 Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Déterminer module et argument de $1 + e^{i\theta}$, $1 - e^{i\theta}$ et $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$. Faire de même avec : $(1+i)^3$. Donner la forme algébrique de $\frac{1-4i}{1+5i}$.

Exercice 2 Déterminer les nombres complexes z tels que

$$|z| = |z - 6 + 5i|, \quad |\overline{z} + i| = 2, \quad z(2\overline{z} + 1) = 1, \quad |z^2| = |z|,$$
$$\tfrac{z+4i}{5z-3} \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}e\left(\tfrac{z-1}{z+1}\right) = 0.$$

Exercice 3 Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ est de module 1. Pour quels $z \in \mathbb{C}$, existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$?

Exercice 4 Soient $(n,p) \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$. Calculer $\sum_{k=p}^{n} k$ puis $\sum_{k=p}^{n} z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$, $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$, $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $]0, \pi[$ l'équation : $\cos(n\theta) = 0$. Donner le nombre exact de solutions.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations trigonométriques suivantes :
$2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; $\cos(2x) \geq 0$; $\tan x \leq 1$; $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -1$;
$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$; $\sin^2 x + 3\cos x - 1 < 0$; $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$;
$\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 8 Linéariser les expressions :
$\cos^6 x$; $\cos^2 x \sin^4 x$; $\sin^5 x$; $\cos^3(2x)\sin^3 x$; $\cos(2x)\cos^3 x$.

Exercice 9 Calculer les sommes : $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 Calculer la somme pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} sin(kb + a),$$

où a et b sont deux réels donnés.

Exercice 11 (Identité du parallélogramme) Montrer que :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 12 Calculer $\cos(5\alpha)$ et $\sin(5\alpha)$ en fonction respectivement de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice 13 Simplifier les expressions $(1+j)^5$ et $\frac{1}{(1+j)^4}$.

Exercice 14 Résoudre les équations suivantes : $z^4 - i = 0$ et $z^3 = -(2+i)^3$.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+1)^n = i(1-z)^n$.

Exercice 16 On note $E = \{z \in \mathbb{C}; \mathcal{I}m(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in E \Rightarrow \frac{z-i}{z+i} \in F$.
2. On définit alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$

   (a) Montrer que tout nombre complexe w de F admet un antécédent par f dans E.

   (b) En déduire que f est bijective de E sur F. Déterminer f^{-1}.

3. On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct.

   (a) On note $E_1 = \{z \in E; \mathcal{R}e(z) = 0\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_1)$ et le représenter graphiquement.

   (b) On note $E_2 = \{z \in E; |z| = 1\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_2)$ et le représenter graphiquement .

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. On identifie $z \in \mathbb{C}$ et le point M_z d'affixe z.
1. Quels sont les points z invariants par f ?
2. Quelle est l'image par f du cercle trigonométrique T ?
3. Quelle est l'image réciproque par f de la droite réelle ?