BCPST1.1-MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 21

Exercice 1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}-\vec{v}||$.
2. En déduire une CNS pour qu'un parallélogramme ABCD soit un rectangle.

Exercice 2

Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites orthogonales et quatre A, B, C et D tels que $A, B \in [Ox), C, D \in [Oy), OA = OC$ et $OB = OD$. Soit I le milieu du segment $[AD]$. Démontrer que $\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$ et $2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OD}$ et en déduire que les droites (OI) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 3 Soit ABC un triangle non plat du plan .

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, on $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
2. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C. Montrer que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = O$ et en déduire que H appartient à la hauteur issue de A.

Exercice 4 Dans le plan muni d'un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$, déterminer l'intersection de la droite D d'équation cartésienne $2x + 5y - 10 = 0$ et de la droite D' passant par $A\binom{-1}{2}$ et dirigée par $\vec{u}\binom{3}{2}$.

Exercice 5 On rapporte la plan à un repère orthonormal direct $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'équation du cercle C_1 de diamètre $[AB]$ où $A\binom{3}{1}$ et $B\binom{7}{-1}$.
2. La partie C_2 du plan définie par l'équation cartèsienne $x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0$ est-elle un cercle ? Si oui, quel est son centre et son rayon ?
3. Déterminer l'intersection de C_1 et C_2.

Exercice 6 On rapporte le plan au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les éventuels points d'intersection de la droite $D : x + 3y - 4 = 0$ et du cercle C_k : $x^2 + y^2 - 6y + k = 0$ pour $k = 4$, $k = 13/2$ et $k = 14$.
2. Déterminer les éventuels points d'intersection des cercles $C : x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ et $C' : x^2 + y^2 + x - 3y = 0$.

Exercice 7 Soient ABCD un tetraedre. Déterminer, en fonction de $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{S}_k$ des points M de l'espace tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MD} = 3k$. On pourra introduire la barycentre G de (A,1), (B,1),(C,1) et (D,3).

Exercice 8 (Théorème de Descartes)

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère un tétraèdre OABC rectangle en O, c'est-à-dire un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont deux à deux orthogonaux.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}$.
2. En déduire que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des aires des trois autres triangles OAB, OBC et OCA.

Exercice 9 L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $\mathcal{P} : x - y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + 2y + 3z = 6$ deux plans. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite et déterminer un vecteur directeur de cette droite .

Exercice 10 L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer la droite $\mathcal{D}$ passant par $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, parallèle au plan d'équation $x + y + z = 2$ et coupant la droite $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes $x = 1$ et $y = z$.

Exercice 11 L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit $\mathcal{P} : x + 2y - 3z + 9 = 0$. En donner une équation paramétrique.
2. Donner une équation du plan passant par les points $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.
3. Trouver une équation du plan médiateur de $[AB]$ où $A\begin{pmatrix}1/2\\2/3\\-2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}5/2\\4/3\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 12 L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer la distance du point $A\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ au plan d'équation $\mathcal{P} : 2x + 3yy - 4z = 6$.
2. Calculer la distance du point $B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ au plan $\mathcal{Q}$ représente paramétriquement par

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = 3 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 13 L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer l'équation de la sphère $\mathcal{S}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ passant par $A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$;
2. $\mathcal{S}$ est la sphère de diamètre $[AB]$ où $A\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$;
3. $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$ et tangente au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - 6y + 3z - 8 = 0$.