BCPST1.1 - MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 3

Exercice 1 Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2).$$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$-2x^2+7x-5 \leq 0$; $(x^2+2x+1)^2 < 16$; $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} > 0$; $(2x+1)(5-x) < (5-x)(x+4)$; $\frac{x^2+10x+25}{-2x^2-7x-3} \leq 0$; $\frac{x}{x-2} \leq \frac{6}{x-1}$; $\frac{4x^2-15x-3}{2x^2-5x-3} \geq 1$; $x+\frac{2}{x} \leq 4$; $8x-18\sqrt{x}-11 \geq 0$;
$6 \leq 2x^2+3x-3 \leq 17$; $\sqrt{x+1} < 2x-3$; $\sqrt{x^2-x-20} \geq x$; $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{4x-1}$;
$\sqrt{x-1}-\sqrt{2x^2+1} \geq 0$.

Exercice 3 Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Peut-on relier $E(x+y)$, $E(x)$ et $E(y)$? Discuter le cas particuliers $y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y) \\ (ii) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \\ (iii) & \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0 \end{array} \right.$$

1. Calucler $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
2. Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.
4. Conclure que $f = Id_{\mathbb{R}}$.