BCPST1.1 - MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N $^\circ$ 4

Exercice 1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. On suppose que $\lim u_n = +\infty$ et que (v_n) est bornée. Montrer que $(u_n + v_n)$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose que $\lim u_n = 0$ et que (v_n) est bornée. Montrer que $(u_n v_n)$ converge vers 0.
3. On suppose que $\lim u_n = +\infty$. Montrer que (u_n) n'est pas bornée.
4. On suppose que (u_n) et (v_n) sont bornées. Montrer que $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont bornées.

Exercice 2 Etudier la monotonie des suites définies par :
1. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n \quad (n \geq 0)$;
2. $u_n = \frac{n!}{2^{n+1}} \quad (n \geq 0)$;
3. $u_n = \frac{\ln(n)}{n} \quad (n \geq 1)$;
4. $u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad (n \geq 0)$.

Exercice 3 Etudier la convergence des suites :
$u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$; $\quad v_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$; $\quad w_n = n^2 - n\cos n + 2$;
$s_n = \frac{2^n + n}{2^n}$; $\quad t_n = n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin(n!)$; $\quad x_n = \frac{n+(-1)^n}{n - \ln(n^3)}$; $\quad y_n = \frac{\alpha^n}{n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Etudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2}$.

Exercice 5 Etudier la convergence de $u_n = \dfrac{E\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]}{E\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right]}$.

Exercice 6 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair. En déduire la convergence de $\left(\sin\left[(3+\sqrt{5})^n \pi\right]\right)_n$.

Exercice 7 1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$

En déduire les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 8 (γ la constante d'Euler) On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\phi(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) - \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

1. Déterminer le sens de variation des fonctions ϕ et ψ et leur limite en $+\infty$. En déduire leur signe sur $]0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
   Etudier la convergence de ces deux suites.

Exercice 9 Etudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.

Exercice 10 Etudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right)$.

Exercice 11 Etudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{n+1}$.

Exercice 12 Etudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = e^{u_n}$.

Exercice 13 On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n > 1$ pour $n \geq 3$, en déduire que les suites $(u_n)_n$ et $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$ sont bien définies sur $\mathbb{N}$.
Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique. Donner v_n, puis u_n en fonction de n et calculer enfin $\lim u_n$.

Exercice 14 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} v_0 > u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n+v_n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \;\; v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n+v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies et qu'elles sont strictement positives.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Calculer leur limite respective.
4. Calculer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et $a = \frac{u_0}{v_0}$.

Exercice 15 On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1. \end{cases}$$

Ecrire u_n en fonction de n, puis étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_n$ en $+\infty$.

Exercice 16 Déterminer en fonction de n le terme u_n des suites réelles qui vérifient :
a) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d) $u_0 = 0$ et $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 0$ pour tout n.
e) $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour tout $n \geq 3$.

Exercice 17 Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de chacune des suites (u_n) définies par :

$$u_n = n^2 + 2n \quad u_n = \sqrt{n} + (\ln(n))^{12} + \sin(n) \quad u_n = e^n + n^e$$

$$u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \qquad u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad u_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$$

$$u_n = \frac{\sin\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \qquad u_n = \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cos\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n^2}}-1}$$

Exercice 18
1. Montrer que l'équation : $x^n + x - 1 = 0$, $n \geq 1$, d'inconnue $x > 0$, admet une unique solution, notée x_n.
2. Comparer x_n et x_{n+1}.
3. Montrer que (x_n) est majorée par 1.
4. Montrer qu'il est impossible que (x_n) converge vers une limite $l < 1$.
5. Conclure que : $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.