BCPST1.1 - MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 6

Exercice 1 Calculer les produits de matrices suivants :

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer U^2, U^3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{C}$, tel que $U^n = \alpha_n U^2$.

Exercice 3 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 - A - 2I_2 = O$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par la donnée de x_0 et y_0 et les relations de récurrence
$$\begin{cases} x_{n+1} & = & x_n - y_n \\ y_{n+1} & = & -x_n + y_n \end{cases}$$
   (a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Etablir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.

   (b) En déduire une expression de x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$
En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

1. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0$.
2. Calculer B^n pour tout $n \geq 2$.
3. Pour quelles valeurs de a la matrice B est-elle inversible ? Calculer B^{-1} pour ces valeurs de a.

Exercice 7 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^2, M^3, M^4, ...

1. Calculer le produit $(I_3 + M + M^2)(I_3 - M)$. En déduire que $I_3 - M$ est inversible et donner son inverse.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe trois suites réelles (a_n), (b_n) et (c_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $(xI_3 + yM)^n = a_n I_3 + b_n M + c_n M^2$.
3. <u>Application numérique</u> : On considère les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = -1$ et les relations de récurrence :
$$\left\{ \begin{array}{lcccccc} u_{n+1} & = & 2u_n & + & v_n & & \\ v_{n+1} & = & & & 2v_n & + & w_n \\ w_{n+1} & = & & & & & 2w_n. \end{array} \right.$$
Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}$ vérifie $AM = MA$ si et seulement si M est diagonale.

Exercice 9 Soient A et B deux matrices symétriques d'ordre n. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 10 Soit $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A, notée $Tr(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux :
$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad Tr(AB) = Tr(BA)$ et $Tr(\lambda A + B) = \lambda Tr(A) + Tr(B)$.
En déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K}),\ Tr(PAP^{-1}) = Tr(A)$.

Exercice 11 Inverser les matrices suivantes ($a \in \mathbb{R}$) :
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$. Déterminer la matrice A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Démontrer qu'il existe un unique couple de matrices $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = A + S$.