BCPST1.1 - MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 7

<u>Dénombrement</u> :

Exercice 1 Combien de numéros de téléphone peut-on attribuer en France, sachant que :
• L'indicatif de région est 01, 02, 03, 04 ou 05.
• Les deux chiffres suivant doivent être distincts.
• De nouveaux numéros "internet" sont disponibles, commençant tous par 08.

Exercice 2 Dans une urne, on place n boules blanches et une noire. On tire simultanément k boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages sans boule noire.
2. Combien y-a-t-il de tirages avec au moins une boule noire ?
3. Combien y-a-t-il de tirages possibles en tout ?
4. Quelle propriété du cours venez-vous de démontrer ?

Exercice 3
1. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot OIGNON ?
2. Combien d'anagrammes peut-on composer avec les lettres du mot BALKANISATION ?
3. Combien d'anagrammes peut-on composer en utilisant toutes les lettres du mot FILOZOFI ?

Exercice 4 Dans un restaurant de Courseulles-sur-mer, cinq convives ont à se partager sept douzaines de belons. Combien y-a-t-il de répartitions possibles des huitres (en les distinguant) ?

Exercice 5 Julie a le choix entre quatre confitures différentes pour étaler sur une tartine, une biscotte et un toast.Combien a-t-elle de possibilités, sachant qu'elle peut ééventuellement, en plus dela confiture, les beurrer ?

Exercice 6 Un tournoi de tennis à Conflans-Sainte-Honorine met en compétition seize joueurs.Le tournoi se déroule en huitièmes de finale, quarts de finales, demi-finales et finale. Combien y-a-t-il de déroulements possibles du tournoi, sachant que la place des joueurs sur la feuille de match est fixée ? Généraliser à 2^n joueurs.

Exercice 7 *Préambule mathématique*
On considère deux suites de nombres (f_n) et (g_n) liées par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k.$$

Montrer par récurrence la relation réciproque suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k.$$

Au bal des pompiers de Bécon-les-Bruyères, chaque cavalier vient avec sa soeur. Le bal rassemble n couples. Chaque jeune fille danse avec un cavalier. Soit G un groupe danseuses. On note S_G l'ensemble des distributions des couples telles que seules les jeunes filles du groupe G se retrouvent avec leur frère. On appelle dérangement de n éléments une permutation où les n éléments changent de place, et on note $d(n)$ le nombre de dérangements de n éléments.

1. Montrer que si $\mathrm{Card}(G) = k$ alors le cardinal de S_G est égal à $d(n-k)$.
2. Montrer que l'ensemble R des distributions possibles des danseurs et des danseuses en couple est la réunion des ensembles S_G obtenus en prenant comme G tous les groupes possibles de danseuses (éventuellement vide).
3. Calculer, en fonction de k, le nombre α_k de groupes G de cardinal égal à k.
4. Exprimer en fonction des α_k le cardinal de l'ensemble R.
5. Combien de distributions en couples hétérosexuels non consanguins peut-on former ?

Exercice 8 Dans une classe il y a autant de filles que de garçons. Tous les éléves étudient au moins une langue. Parmi eux : 10 étudient l'espagnol, 15 étudient l'allemand, 20 étudient l'anglais, 7 étudient l'espagnol et l'allemand, 8 étudient l'allemand et l'anglais, 9 étudient l'anglais et l'espagnol. Quel est l'effectif de la classe ?

Exercice 9 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \emptyset$? tels que $A \cup B = E$?
2. Combien y-a-t-il de triplets (A, B, C) de parties de E tels que $A \cup B \cup C = E$?

Exercice 10 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de parties de E formées de k éléments ?
2. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ?
3. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E ?
4. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément est le plus grand ?
5. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?

Calcul des probabilités :

Exercice 11 Soient A et B des événements aléatoires avec $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Donnez un encadrement de $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Déterminez $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque A et B sont incompatibles puis lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$.

Exercice 12 Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Donnez l'écriture ensembliste des événements suivants :

1. Au moins un des A_i est réalisé.
2. Aucun des A_i n'est réalisé.

Exercice 13 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ la tribu de ses parties et la probabilité P définie (partiellement, x et y étant à déterminer) par $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = x$ et $P(\omega_4) = y$. Soit les événements $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Pour un événement quelconque C, on désigne son complémentaire par $\overline{C}$.

1. Combien d'événements pouvons nous considérer dans cet exemple ?
2. On donne $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$. Déterminer complètement la probabilité P.
3. Ici, les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?
4. On rappelle que la différence symétrique $A \Delta B$ peut être définie par $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
Calculer $P(A \Delta B | \overline{B})$, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de $A \Delta B$ sachant $\overline{B}$ réalisé.

Exercice 14 On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?
2. Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.

Exercice 15 Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres de sa bibliothèque. Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de "Guerre et Paix" de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ?

Exercice 16 Un joueur de poker reçoit une "main" de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker). Quelle est la probabilité que sa main contienne :
1) une seule paire ? 2) deux paires ? 3) un brelan ? 4) un carré ? 5) un full ?

Probabilités conditionnelles :

Exercice 17 On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard, on expose une face au hasard : elle est rouge.
Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ? (Construisez d'abord l'espace de probabilité adéquat).

Exercice 18 Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que le plus âgé soit un garçon ?

Exercice 19 On cherche un parapluie qui avec la probabilité $p/7$ se trouve dans l'un quelconque des sept étages d'un immeuble ($0 \leq p \leq 1$). On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ?

Exercice 20 Considérons une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges. Quelle est la probabilité de la suite "blanc, blanc, rouge" si on tire les boules sans remise ?

Exercice 21 On considère n urnes ($n \geq 1$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 22 Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement, il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Pour la paix, les Rigolus sont à 60% favorables, 16% y sont opposés et 24% sont sans opinion. Par contre, pour la guerre, les Tristus sont à 68% favorables, 12% opposés et 20% sans opinion. Vous rencontrez par hasard un habitant d'Orion (on ne vous demande pas la probabilité de le rencontrer..) et vous lui demandez son opinion.
1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. S'il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un Rigolus ?
3. Finalement, s'il vous répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit un Tristus ?

Indépendance :

Exercice 23 On jette trois dés. Calculez :
1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Exercice 24 On jette deux dès non-pipés, un noir et un blanc. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants :
- «le chiffre du dè noir est pair»,
- «le chiffre du dè blanc est impair»,
- «les chiffres des deux dès ont même parité».

Exercice 25 On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 4 à 5.
1. On tire une à une successivement trois boules de l'urne, sans remise. Combien y a-t-il de façons d'obtenir, dans cet ordre, deux boules blanches, puis une noire ?
2. Même question pour des tirages avec remise.
3. Même question pour un tirage simultané de trois boules.

Exercice 26 Dans une urne, on place 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement avec remise quatre boules de l'urne. On note N l'événement "obtenir une boule noire" et B l'événement "obtenir une boule blanche".

1. Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne le résultat (N, N, B, B) dans cet ordre ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches exactement ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

Exercice 27 On considère une suite de n lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0, 1[$). "pile" (resp. "face") sera noté en abrégé P (resp. F).

1. Soit A_k l'événement : "La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $(k - 1)$ et k." Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : "La séquence PF apparaît au moins une fois".
3. Soit B_k l'événement : "On a obtenu exactement k fois P". Calculer $\mathbb{P}(B_k)$.

Exercice 28 On dispose de 2 dès A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit $1/3$.
- Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dè A ;
- Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dè B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup.
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dè A.

Exercice 29 Soient $N \in \mathbb{N}^*$, a un entier tel que $0 \leq a \leq N$ et p un réel vérifiant $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$, et soit $q = 1 - p$.
Une particule située au début du processus au point d'abscisse a se déplace sur un axe aléatoirement, par saut successifs, indépendants les uns des autres, d'amplitude $+1$ avec la probabilité p et -1 avec la probabilité q. Si x_n est l'abscisse de la particule à l'issue du n^e saut, alors :

$$x_0 = a \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 \text{ avec la probabilité } p \\ x_n - 1 \text{ avec la probabilité } q \end{cases}.$$

Le processus s'arrête dès que la particule atteint l'une des extrémités du segment $[0, N]$.

1. Soit u_a la probabilité que le processus s'arrête en O, étant initialement parti de a. On a en particulier $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a :
   $$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}.$$
   (b) Exprimer u_a en fonction de a, N, p et q.
2. De même, calculer la probabilité v_a que le processus s'arrête en N, étant initialement parti de a.
3. Calculer la somme $u_a + v_a$. En déduire la probabilité que le processus ne s'arrête pas, c'est-à -dire que $1 \leq x_n \leq N - 1$, pour tout $n \geq 0$.