BCPST1.1 - MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N ° 8

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T > 0$. On suppose que f est monotone, montrer que f est constante.

Exercice 3 Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f a au moins un point fixe. Est-ce vrai si f est décroissante ?

Exercice 4 [Fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques]

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Montrer les formules suivantes, valables pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\cosh x + \sinh x = e^x; \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}; \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

2. Calculer, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\cosh(x+y)$, $\cosh(x-y)$, $\sinh(x+y)$ et $\sinh(x-y)$ en fonction de $\cosh x$, $\sinh(x)$, $\cosh y$ et $\sinh y$. En déduire des formules de transformation de sommes en produits de fonctions hyperboliques.

Exercice 5 1. Montrer que : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 6 Soit $0 < a \leq b$. On pose $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Etudier la monotonie de f et en déduire que

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Exercice 7 Pour $x > 0$ simplifier $\left(\exp\left(x^2\right)\right)^{\frac{\ln x^{\frac{1}{x}}}{x}}$.

Exercice 8 Parmi les relations suivantes lesquelles sont exactes :

1) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ 2) $a^b a^c = a^{bc}$ 3) $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$

4) $(ab)^c = a^{\frac{c}{2}} b^{\frac{c}{2}}$ 5) $\left(a^b\right)^c = a^{\left(b^c\right)}$ 6) $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$?

Exercice 9 Résoudre les équations suivantes :

1) $e^x + e^{1-x} = e+1$ 2) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$ 3) $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

Exercice 10 Résoudre les systèmes suivants :

$a)\ \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que : $\begin{cases} (i) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y) \\ (ii) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \\ (iii) & \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0 \end{cases}$

1. Calucler $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
2. Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.
4. Conclure que $f = Id_{\mathbb{R}}$.