BCPST1.1 - MATHÉMATIQUES, FEUILLE DE TD N$^\circ$ 9

Exercice 1 Limites par encadrement. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos e^x}{x^2+1}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} E\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to0} x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 2 Opérations sur les limites. Déterminer les limites suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$
2. $\lim\limits_{x\to1^+} \ln x\ln(\ln x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln x$
4. $\lim\limits_{x\to0^+} (\ln(\sin x)-\ln x)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-\sqrt{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$
7. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x(x+1)}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

Exercice 3 Quantité conjuguée. Déterminer les limites suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 4 Utilisation des équivalents. Déterminer les limites suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

1. **Logarithme et exponentielle.**
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(1+x)-\ln x\right)$
   (b) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^x-1}{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)$
   (d) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-2}$
   (e) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$
   (f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$
   (g) $\lim\limits_{x\to0} \ln^x(1+x)$

(h) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$

2. **Puissances réelles.**

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}$

3. **Fonctions trigonométriques.**

   (a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\sin(\pi x)}$

   (b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\pi x)}{\tan(3x)}$

   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{\pi}{x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)}$

   (e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e^{-\frac{\pi}{2}x^2}-e^{-\frac{\pi}{2}}}$

Exercice 5 Passer au logarithme dans un équivalent (? ? ?)

1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0\in\overline{R}$ et à valeurs strictement positives. On suppose que $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}g(x)$ et que $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l\in\overline{\mathbb{R}^+}\backslash\{1\}$. Etablir que $\ln f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\ln g(x)$.
2. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $f(x)=\ln\left(x^2+2^x\right)$.

Exercice 6 Le théorème des gendarmes permet de trouver des équivalents.
Soit f une fonction telle qu'au voisiange de $x_0\in\overline{R}$, on ait :

$$x^2+\frac{1}{x}\leq f(x)\leq x^2+x.$$

Déterminer un équivalent de f en x_0.

Exercice 7 Plus difficile. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to1}(1+\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
2. $\lim\limits_{x\to0}\left[e^{\sin x}-\sin^2(x)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$
3. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\ln(3+2x)}{\sqrt{2+x}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(4\pi x)\tan(\pi x)$
5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\sqrt{x}\cos\left[\frac{\pi}{2}+\sqrt{x}\right]}$
6. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln[\cos(2\pi x)]}{\sin\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]\times\left[\sqrt{1-\sin(\pi x)}-1\right]}$
7. $\lim_{x\to0}\frac{e^{1/(x^2+1)}-e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\tan^2(x)-2\sin^3(x)}$