BCPST1.1

TP n°8: Calculs approchés d' intégrales.

Nous allons travailler successivement avec les trois fonctions suivantes :

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ sur } [0,1], \quad g(x)=\sin^2(x) \text{ sur } [0;\pi], \qquad h(x)=\frac{1}{1+x^2} \text{ sur } [0,1].$$

Exercice 1. *Dans des fichiers *m de Matlab, que l'on nommera* f,g,h*, programmer chacune de ces fonctions.*

<u>Méthode des rectangles :</u> on divise l'intervalle [a,b] en sous-intervalles $[a_k,a_{k+1}]$ où k=0,1,…,n-1 et $a_k=a+k(b-a)/n$. Sur cet intervalle on approxime f(t) par $f(a_k)$, ce qui permet d'approximer $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$ par $I_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)dt = (a_{k+1}-a_k)f(a_k) = \frac{b-a}{n} f(a_k)$. Ensuite on approxime $\int_a^b f(t)dt$ par la somme des I_k pour k allant de 0 à n-1. Ainsi on a l'approximation :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

On retrouve le *<u>théorème de la valeur moyenne</u>*!!

On admettra que l'erreur est majorée par $M_1\frac{(b-a)^2}{n}$ avec $M_1=\max_{t\in[a,b]}|f'(t)|$.

<u>Méthode des trapèzes :</u> Elle a été vue en TD. On se place dans la même situation que dans la méthode des rectangles sauf que l'on approxime $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$ par $J_k = \frac{b-a}{n}\times\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$. On obtient l'approximation :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)}{2}.$$

On a vu en TD que l'erreur est majorée par $M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$ avec $M_2=\max_{t\in[a,b]}|f''(t)|$

Exercice 2. *Programmation des différentes méthodes: rectangles, trapèzes et Simpson.*

a- *Pour chacune des fonctions f, g et h, écrire un programme qui : étant donnés (comme arguments d'entrée) 2 réels a, b et un entier n, renvoie* R_n *. (nième terme de la suite de la méthode des rectangles)*

b- *Pour chacune des fonctions f, g et h, écrire un programme qui : étant donnés (comme arguments d'entrée) 2 réels a, b et un entier n, renvoie* T_n *. (nième terme de la suite de la méthode des trapèzes)*

BCPST1.1

c- *Comprendre le fonctionnement de la fonction quad de Matlab (*help quad*) Cette fonction calcule une valeur approchée d'une intégrale.*

Exercice 3. *Comparaison des résultats :*

Etablir des tableaux du type ci-dessous pour chacune des méthodes; comparer vos valeurs avec celles données par la fonction *int.*

Méthode des rectangles : Valeurs approchées

f(x)	a	B	n=10	n=100	n=1000	$n=10^5$	quad
$Exp(-x^2/2)$	**0**	**1**					
$1/(x^2+1)$	**0**	**1**					
$\sin^2(x)$	**0**	**Π**					

Méthode des trapèzes : Valeurs approchées

f(x)	a	B	n=10	n=100	n=1000		quad
$Exp(-x^2/2)$	**0**	**1**					
$1/(x^2+1)$	**0**	**1**					
$\sin^2(x)$	**0**	**Π**					

Exercice 4. *Représentation graphique.*

Ecrire un programme réalisant les objectifs suivants:

1) Introduire au clavier deux réels a, b et un entier naturel non nul n.

2) Tracer sur une même figure la représentation graphique de f, puis les n rectangles associés à la méthode des rectangles.