BCPST1.1

Courbes paramétrées – Fonctions de plusieurs variables

Courbes paramétrées: Tracé en deux ou trois dimensions.

On désire représenter une courbe donnée par une représentation paramétrique $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ pour t décrivant [a,b]. Le principe est le même que pour une courbe y=f(x) : il faut subdiviser [a,b] en n intervalles (vecteur t) puis exprimer x et y en fonction de t et enfin plot(x,y).

Pour ajouter un titre, une légende sur les axes, modifier les échelles…On peut accéder aux propriétés de la figure dans le menu Edit → axes properties.

Exemple 1 : *Tracer la courbe définie par* $\begin{cases} x = -\sqrt{2}\cos^2(t) + 2\cos(t) \\ y = \sin(t)\cos(t) \end{cases}$ sur $[0,2\pi]$

Exemple 2 : Courbe en 3 dimension.

L'instruction de tracé est plot3, de syntaxe analogue à plot

→*Tracer la courbe de représentation paramétrique* $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases}$ *pour t décrivant* $[0,6\pi]$

Exemple 3 : La cardioïde.

Etudier et tracer : $\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases}$.

(on admet que la tangente au point stationnaire est horizontale)

Exemple 4 :

Le lemniscate de Bernouilli. Etudier et tracer : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$.

Exemple 5 : Le folium de Descartes.

On considère le plan muni du repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ et on note Γ le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit A un point de Γ. On note B et C les points du cercle Γ définis par : $\begin{cases} \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}\right) = 2\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right) [2\pi] \\ C = \mathrm{sym}_{/Ox}(A) \end{cases}$.

On appelle G le centre de gravité du triangle (ABC). La courbe $\mathscr{F}$, lieu des points G quand A décrit Γ, est un folium de Descartes.

a) On note t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$. Montrer que $\mathscr{F}$ admet une représentation paramétrique donnée par : $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}(2\cos t + \cos 2t) \\ y(t) = \frac{1}{3}\sin 2t \end{cases}$.

b) Programmer la courbe $\mathscr{F}$ (on remarquera que $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = M(\pi)$).

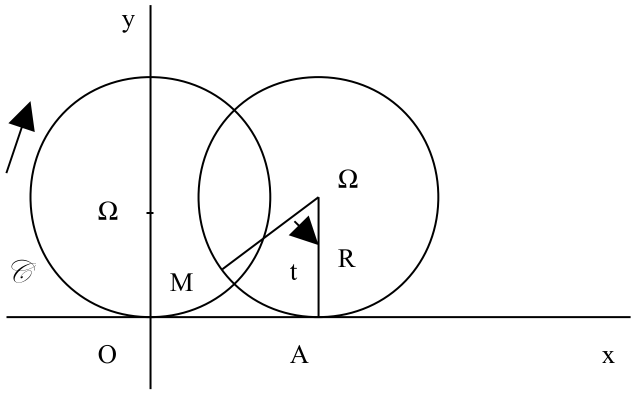
c) Faire chez soi, l'étude des variations des fonctions x et y.

Exemple 6 :: La cycloïde.

Un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R roule sans glisser sur l'axe (Ox). Lorsque le cercle se déplace, un point M lié à $\mathscr{C}$ décrit une courbe Γ appelée cycloïde.

a) Au départ le point M est situé en O. A un instant donné, on note A le point de contact entre le cercle et l'axe (Ox) et t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega A})$. Montrer que les coordonnées de M sont : $\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \end{cases}$.

b) Etudier la courbe et la tracer dans le cas R = 1. On admettra que les tangentes aux points singuliers sont verticales.



Fonctions de plusieurs variables: Tracé en trois dimensions.

A l'aide des fonctions *meshgrid*(), *mesh*() et *surf*(), tracer la surface représentative des fonctions:

1) $f:(x,y)\rightarrow x^2+y^2$ pour $(x,y)\in[-3,3]^2$,

2) $g:(x,y)\rightarrow \sin(x)*\cos(y)$ pour $(x,y)\in[0,2*pi]^2$.