

Valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

On considère le nombre complexe $w_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

1. Montrer : $1 + w_1 + w_1^2 + w_1^3 + w_1^4 = 0$.
2. On note $\alpha = w_1 + w_1^4$. Vérifier que : $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$.
3. Déterminer la forme trigonométrique de w_1^4 et la comparer à celle de $\overline{w_1}$. En déduire la valeur algébrique de α .
4. Résoudre l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.
5. En déduire une valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.