Chapitre 1

Notions élémentaires de logique et de théorie des ensembles

1 Notation

Traditionnellement, les objets mathématiques (nombres, fonctions...) sont notés avec une lettre de l'alphabet pouvant être minuscule, majuscule, capitale etc... Lorsqu'on se donne une liste de n objets on utilise un indice : $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On peut aussi utiliser un indice supérieur, placé entre parenthèses pour ne pas le confondre avec la puissance : $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Lorsque l'on considère un tableau de nombres, on a recourt au double-indiçage : x_{ij} désigne l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Pour varier les notations, on utilise aussi l'aplhabet grec, dont nous rappelons ci-dessous les minuscules et majuscules. Il est vivement recommander de bien le connaitre (sous peine de faire sourire son examinateur à l'oral).

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	Alpha
β	B	Bêta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ϵ	E	Epsilon
ζ	Z	Dzéta
η	H	Êta
θ	Θ	Thêta
ι	I	Iota
κ	K	Kappa
λ	Λ	Lambda
μ	M	Mu

Minuscule	Majuscule	Nom
ν	N	Nu
ξ	Ξ	Xi
o	O	Omicron
π	Π	Pi
ρ	P	Rhô
σ	Σ	Sigma
τ	T	Tau
υ	Υ	Upsilon
φ	Φ	Phi
χ	X	Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega

On utilisera aussi les abréviations suivantes :
- cqfd = ce qu'il fallait démontrer :
- ie = id est = c'est-à-dire ;
- p/r = par rapport à ;

- resp. = respectivement.

Ce cours de mathématiques est organisé selon une série de **définitions**, signalées par un cadre vert, par une série de **théorèmes** signalés par un cadre rouge, le tout illustré par des exemples et des exercices, ces derniers étant signalés par un cadre gris. Certains chapitres comportent des explications sur la manière de rédiger. Celles-ci sont signalés par un cadre jaune.

Le mot **théorème** est réservé à des résultats mathématiques jugés importants. Dans le cas d'un théorème "facile", on utilise le mot **proposition**. Parfois, on reformule certains théorèmes dans des cas simples, directement utilisables en pratiques : on parle alors de **corollaires**. Enfin certaines démonstrations plus ardues que les autres nécessiteront de démontrer des petites propositions intermédiares appelées **lemmes**.

2 Logique

Un **prédicat** est un énoncé mathématique qui est soit **juste**, soit **faux**. On dit qu'un prédicat ne peut prendre que **deux valeurs logiques** : V ou F (i.e. Vrai ou Faux).

Par convention, lorsqu'on énonce une prédicat, on sous-entend toujours qu'il est vrai.

***Exemple* :** « La fonction f est croissante sur l'intervalle I. »

Soient A et B deux prédicats. On définit les opérations suivantes.

• **Négation :** La négation de A est notée $non(A)$ ou $\overline{A}$. Elle est définie par la **table de vérité** suivante :

A	$non(A)$
V	F
F	V

On a bien évidemment $non(non(A)) = \overline{\overline{A}} = A$ (l'égalité signifie que les deux prédicats ont même table de vérité).

• **« Et » :** Le prédicat $A\ et\ B$ est défini par :

A	B	$A\,et\,B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

On a bien évidemment $A\ et\ B = B\ et\ A$.

• **« Ou » :** Le prédicat $A\,ou\,B$ est défini par :

A	B	$A\,ou\,B$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

On a bien évidemment $A\, ou\, B = B\, ou\, A$.

Remarquons qu'il s'agit d'un « ou » **inclusif**, c'est-à-dire que les deux prédicats peuvent être vrais en même temps (contrairement au « ou » exclusif).

Proposition 1 Lois de Morgan
Les prédicats suivants ont même table de vérité.
– « $non(A\, et\, B)$ » et « $non(A)\, ou\, non(B)$ »
– « $non(A\, ou\, B)$ » et « $non(A)\, et\, non(B)$ »

• **Implication :** Le prédicat $A \Longrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longrightarrow B$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

En pratique, on ne considère que les première et troisième lignes de cette table de vérité, c'est-à-dire que l'on traduit le prédicat $A \Longrightarrow B$ par : **si** A est vrai **alors** B est vrai, ou encore pour que A soit vrai **il faut que** B soit vrai, pour que B soit vrai **il suffit** que A soit vrai. On dit que A est une **condition suffisante** pour B et que B est une **condition nécessaire** pour A.

***Exemple* :** On pose A = « Le chien court sous la pluie » et B = « Le chien est mouillé ». Il est clair que $A \Longrightarrow B$. Par contre on a pas $B \Longrightarrow A$ (le chien est peut-être tombé dans la piscine !). Dans ce cas, on dit que la réciproque de l'implication $A \Longrightarrow B$ est fausse. On peut donc dire que « pour que le chien court sous la pluie, il faut qu'il soit mouillé », « pour que le chien soit mouillé, il suffit qu'il court sous la pluie ».

Rédaction : Pour montrer que $A \Longrightarrow B$, on procède de la façon suivante. On suppose que la prédicat A est vrai ; on doit alors montrer que B est vrai.

Pour montrer qu'une implication est vraie on utilise parfois le **raisonnement par contraposée**. Pour prouver que $A \Longrightarrow B$ est vrai, on montre que $non(B) \Longrightarrow non(A)$ est vrai, c'est-à-dire : **si** B est fausse **alors** A est fausse. En effet, on peut vérifier que ces deux prédicats ont la même table de vérité.

***Exemple* :** Montrer que les prédicats $A \Longrightarrow B$ et $non(A)\, ou\, B$ ont même table de vérité. En déduire que les prédicats $A \Longrightarrow B$ et $non(B) \Longrightarrow non(A)$ ont même table de vérité (raisonnement par contraposée).

• **Équivalence :** Le prédicat $A \Longleftrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

En pratique, on ne considère que la première ligne de cette table de vérité, c'est-à-dire que l'on traduit la proposition $A \iff B$ par : A est vrai **si et seulement si = (ssi)** B est vrai, ou encore pour que A soit vrai **il faut et il suffit que** B soit vrai. On dit que A (resp. B) est une **condition nécessaire et suffisante** pour B (resp. pour A).

Pour montrer qu'une équivalence est vraie on raisonne très souvent par **double-implication** : on montre que $A \Longrightarrow B$ est vrai puis que $B \Longrightarrow A$ l'est aussi. En effet, on peut vérifier que les prédicats $A \iff B$ et « $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$ » ont la même table de vérité.

***Exemple* :** Montrer que le prédicat $A \iff B$, et le prédicat $\left(A \Longrightarrow B\right)$ et $\left(B \Longrightarrow A\right)$ ont même table de vérité.

Rédaction : Pour montrer que $A \iff B$, on procède donc par double-implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que la prédicat A est vrai ; on doit alors montrer que B est vrai. On en déduit que $A \Longrightarrow B$ est vrai.
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que la prédicat B est vrai ; on doit alors montrer que A est vrai. On en déduit que $B \Longrightarrow A$ est vrai.
On peut alors conclure que $A \iff B$ est vrai.

• **Raisonnement par l'absurde** : Pour montrer qu'un prédicat A est vraie, on peut choisir de raisonner par l'absurde : on suppose que A est faux, et on essaye d'aboutir à une contradiction évidente du type $2 < 1$ ou $0 < x < 0$ etc...

***Exemple* :** Soit $x > 0$. Démontrer par l'absurde que $2x > x$.

• **Raisonnement par récurrence :** Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On veut démontrer qu'il existe un entier n_0 fixé tel que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On dispose pour cela de différents résultats.

Théorème 2 Récurrence simple
On suppose que :
(i) Initialisation : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vrai ;
(ii) Hérédité : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n)$ vrai $\Longrightarrow P(n+1)$ vrai.
Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

***Exemple* :** Pour $n \geq 1$, $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Théorème 3 Récurrence à deux pas
On suppose que :
(i) Initialisation à deux pas : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vrais ;
(ii) Hérédité à deux pas : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n)$ et $P(n+1)$ vrais $\Longrightarrow P(n+2)$ vrai.
Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

***Exemple* :** On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que pour $n \geq 0$, $F_n \geq 0$.

Théorème 4 Récurrence forte
On suppose que :
(i) Initialisation : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vrai ;
(ii) Hérédité forte : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, $P(n_0+2)$, ..., $P(n)$ vrais $\Longrightarrow P(n+1)$ vrai.
Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Exemple **:** On pose $u_1 = 3$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$. Montrer que pour $n \geq 1$, $u_n = 3n$.

3 Ensembles

3.1 Définitions

Définition 5 Ensembles
Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments. On note $x \in E$ lorsque x est élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.

Exemple **:** Un ensemble peut donc être défini en énumérant la liste de ses éléments (entre accolades) :
- $\{a\}$ = ensemble formé d'un unique élément a = **singleton**
- E = ensemble des couleurs d'un jeu de 32 cartes = {coeur, carreau, trèfle, pique} (4 éléments)
- $\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (infinité d'éléments)

Soit $P(x)$ une prédicat dépendant de x élément de E.

Définition 6 Quantificateurs

1. Lorsque $P(x)$ est vrai **pour tous** les éléments x de E, on le note :
$$\forall x \in E, \quad P(x)$$
Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur « quel que soit ».
2. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **au moins un** élément x de E, on le note :
$$\exists x \in E / P(x) \qquad \text{ou} \qquad \exists x \in E; P(x)$$
Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur « il existe ».
3. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **un unique** élément x de E, on le note :
$$\exists! x \in E / P(x) \qquad \text{ou} \qquad \exists! x \in E; P(x)$$
Le symbole $\exists!$ est appelé quantificateur « il existe un unique ».

Rédaction :

1. Pour montrer que « $\forall x \in E,\ P(x)$ », on procède de la manière suivante : on se donne $x \in E$ fixé quelconque et le but est laors de montrer que $P(x)$ est vrai pour ce x.
2. Pour montrer que « $\exists x \in E/\ P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a au moins une solution.
3. Pour montrer que « $\exists! x \in E/\ P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a une unique solution.

Il faut connaître la négation de ces quantificateurs.

Proposition 7 L'égalité signifiant que les prédicats ont même table de vérité :

1. $non\big(\forall x \in E, P(x)\big) = \exists x \in E; non\big(P(x)\big)$.
2. $non\big(\exists x \in E; P(x)\big) = \forall x \in E, non\big(P(x)\big)$.

Nous allons maintenant voir comment comparer deux ensembles.

Définition 8 Inclusion
Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on le note $E \subset F$ ou $E \subseteq F$, lorsque tout élément de E est aussi élément de F, i.e. lorsque :

$$\forall x \in E, \quad x \in F$$

ou encore :

$$x \in E \Longrightarrow x \in F$$

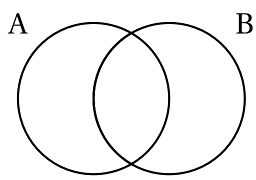
On dit aussi que E est un sous-ensemble de F, ou que E est une partie de F.

Dans le cas contraire, on note $E \not\subset F$ et on a : $\exists x \in E/\ x \notin F$.

⚠ ATTENTION : dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on peut toujours comparer deux nombres x et y : on a $x \leq y$ et $x \geq y$. On dit que la relation d'ordre $\leq$ est **totale**. Mais ce n'est pas le cas pour les ensembles : si A et B sont deux ensemble quelconques, on peut avoir $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

***Exemple* :** Dans $\mathbb{R}$, si $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, alors $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

***Exemple* :** Sur l'exemple suivant, on a : $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.



Rédaction : Pour montrer que $E \subseteq F$ on se donne $x \in E$ fixé quelconque, et on démontre que $x \in F$.

Proposition 9 Si E, F, G sont trois ensembles :
(i) on a $E \subseteq E$;
(ii) si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$ alors $E \subseteq G$.

Définition 10 Egalité
Soient E et F deux ensembles.
On dit que $E = F$ lorsque $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, i.e. lorsque : $x \in E \iff x \in F$.

Si $E \subseteq F$ mais $F \not\subseteq E$ alors on dit que E est strictement inclus dans F, et on le note $E \subsetneq F$.

Rédaction : Pour montrer que $E = F$ on procède donc par double-inclusion.
$\boxed{\subseteq}$ On se donne $x \in E$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in F$. On en déduit que $E \subseteq F$.
$\boxed{\supseteq}$ On se donne $x \in F$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in E$. On en déduit que $F \subseteq E$.
On peut alors conclure que $E = F$.

On définit un ensemble particulier qui ne possède pas d'élément.

Définition 11 Ensemble vide
On appelle ensemble vide, noté $\emptyset$, l'ensemble qui ne possède pas d'élément. Il est inclus dans tout autre ensemble ; il ne possède qu'un sous-ensemble : lui-même.

Très souvent on définit un sous-ensemble en imposant que ses éléments vérifient une certaine propriété.

Définition 12 Sous-ensemble défini par une propriété
Soient E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant de x élément de E. L'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $P(x)$ est noté :

$$\{x \in E \,/\, P(x)\} \text{ ou encore } \{x \in E \,;\, P(x)\}$$

C'est un sous-ensemble de E.

***Exemple* :** $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \geq 1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 13 Ensemble des parties
Si E est un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble par les parties de E.
On a donc pour F un ensemble quelconque :

$$F \subseteq E \iff F \in \mathscr{P}(E)$$

On a toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

***Exemple*:** Si E est un singleton : $E = \{a\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, E\}$.

Terminons ce paragraphe par un paradoxe simple et célèbre, appelé paradoxe de Russel : il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Ce paradoxe est plus facile à comprendre sous la forme du paradoxe du barbier : il n'existe pas de barbier qui raserait tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes (et seulement ceux-là). En effet, qui raserait ce barbier ?

3.2 Opérations sur les ensembles

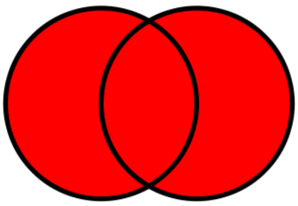
Définition 14 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit :
(i) l'intersection de A et B, notée $A \cap B$, par :

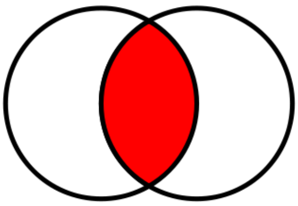
$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

(ii) l'union de A et B, notée $A \cup B$, par :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

Les figures suivantes représentent l'union et l'intersection de deux ensembles A et B.



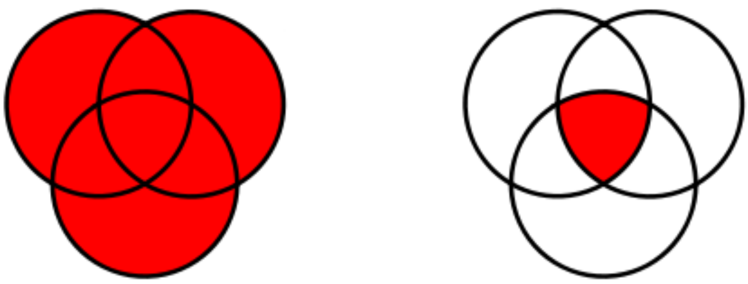


Proposition 15 Règles de calcul.
Si A, B et C sont trois parties d'un ensemble E :
1) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
2) Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
3) $A \cap A = A \cup A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$;
4) Commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$;
5) Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$.

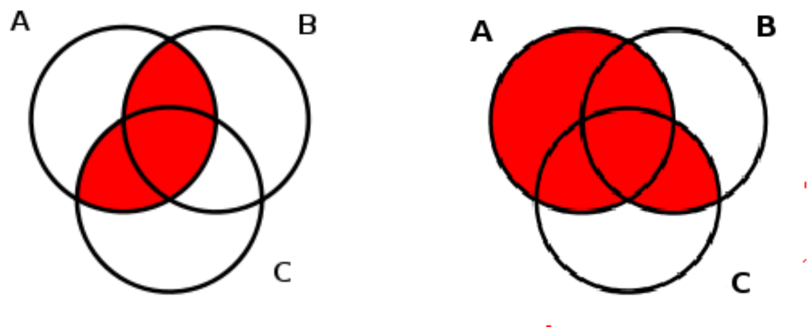
La propriété d'associativité de l'union permet de se dispenser des parenthèses et d'utiliser la notation $A \cup B \cup C$ pour l'union de trois ensembles : en effet, cette notation désigne indifféremment $(A \cup B) \cup C$ ou $A \cup (B \cup C)$, et ces deux quantités sont égales donc cela ne pose pas de problème de confusion.
La même remarque est valable pour l'intersection : on peut utiliser la notation $A \cap B \cap C$.

⚠ Par contre, dans une expression mélangeant union et intersection, on ne peut pas se dispenser des parenthèses.
Par exemple la notation $A \cup B \cap C$ n'a aucun sens ! En effet, elle peut désigner $(A \cup B) \cap C$ ou $A \cup (B \cap C)$, et comme ces deux quantités sont différentes, on ne sait plus de quo on parle !

Les figures suivantes représentent l'union et l'intersection de trois ensembles A, B et C.



Les propriétés de distributivité sont aussi très importantes : elle sont à rapprocher de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des nombres. Les figures suivantes permettent de visualiser les formules $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$ et $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup B\right)$.



Définition 16 On dit que deux parties A et B d'un ensemble E sont disjointes ou incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$.

⚠ ATTENTION ! Ne pas confondre A et B **disjoints** : $A \cap B = \emptyset$, et A et B **distincts** : $A \neq B$. Deux ensembles disjoints sont distincts (ou vides), mais deux ensembles distincts ne sont en général pas disjoints.

Les figures suivantes représentent deux ensembles distincts mais non disjoints, et deux ensembles disjoints (donc distincts).

Définition 17 Complémentaire.
Soit A une partie d'un ensemble E. Le complémentaire de A dans E, noté $\complement_E A$, est défini par :

$$\complement_E A = \{x \in E / \ x \notin A\}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, $\complement_E A$ est noté plus simplement $\overline{A}$.

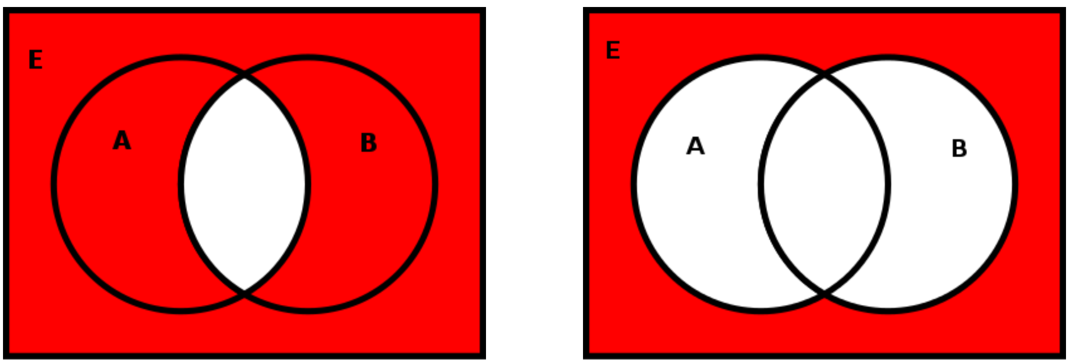
Les figures suivantes représentent une partie A et son complémentaire (l'ensemble E est représenté par un carré).

Proposition 18 Règles de calcul.
Si A est une partie de E :
1) $\overline{\overline{A}} = A$;
2) $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{E} = \emptyset$;
3) $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Exemple **:** Si A et B parties de E : $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq \overline{B}$.

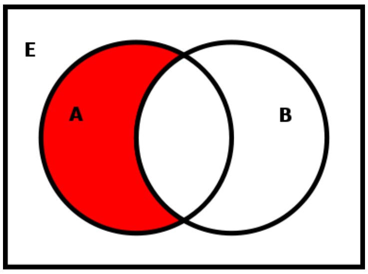
Théorème 19 Lois de Morgan
Si A, B parties de E :
1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Les deux figures suivantes permettent de visualiser les lois de Morgan.



Définition 20 Différence
Si A, B parties de E : $A - B = A \cap \overline{B} = \{x \in A / \; x \notin B\}$. On le note aussi $A \backslash B$.

La figure suivante représente $A \backslash B$.



3.3 Produits cartésiens et familles d'éléments

Définition 21 Produit cartésien
Soient E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \{(x, y) / \; x \in E \text{ et } y \in F\}$$

$E \times F$ est appelé produit cartésien de E et de F.
Plus généralement, si E_1, E_2, ..., E_n sont n ensembles, on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., $x_n \in E_n$.
Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est noté E^n.

***Exemple* :** $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) / \; x \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$.

Définition 22 Famille d'éléments de E
Soient I un ensemble (appelé ensemble d'indices), et E un autre ensemble. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de E indexée par I lorsque, pour chaque $i \in I$, x_i est un élément de E.
Par exemple pour $I = [\![1, n]\!]$, $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$ est un n-uplet, et pour $I = \mathbb{N}$, $(x_i)_{i \in I} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite.

***Exemple* :** $(\sqrt{x})_{x \geq 0}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$, indexée par $\mathbb{R}^+$.

Définition 23 Famille de parties de E
On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E, lorsque pour $i \in I$, A_i est une partie de E.

Dans ce cas $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$, au sens de la définition donnée précédemment.

Exemple **:** $\left(\left[1,1+\dfrac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de parties de $\mathbb{R}$, indexée par $\mathbb{N}^*$.

Définition 24 Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, on définit l'union des A_i pour $i\in I$, notée $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, par :

$$x\in\bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i\in I \,/\, x\in A_i$$

De même on définit leur intersection $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$:

$$x\in\bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i\in I,\, x\in A_i$$

Exemple **:** $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[1,1+\frac{1}{n}\right[= [1,2[$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[1,1+\frac{1}{n}\right[= \{1\}$.

Proposition 25 Règles de calcul.
Si B est une partie de E et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, alors :
1) Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$,

et de $\cup$ par rapport à $\cap$: $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$.

2) Lois de Morgan : $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I}\overline{A_i}$ et $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I}\overline{A_i}$.

Définition 26 Si $(A_i)_{i\in I}$ famille de parties de E, on dit que les A_i sont deux à deux disjoints lorsque :

$$\forall i,j\in I,\quad i\neq j \implies A_i\cap A_j=\emptyset$$

⚠ ATTENTION : les accolades définissent des ensembles et les parenthèses des familles.
Pour les ensembles, les répétitions ne sont pas prises en compte, contrairement aux familles : $\{a,a,b\}=\{a,b\}$ mais $(a,a,b)\neq(a,b)$.
Pour les ensembles l'ordre n'est pas pris en compte, contrairement aux familles : $\{a,b\}=\{b,a\}$ mais $(a,b)\neq(b,a)$.

4 Applications

4.1 Définitions

Définition 27 Application.
Soient E et F deux ensembles. Une application définie sur E à valeur dans F :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une "relation" qui à chaque $x \in E$ associe un unique élément $y \in F$, noté $f(x)$.
On le note $f : E \longrightarrow F$.
$f(x)$ est appelé image de x, et si $y = f(x)$ alors x est appelé antécédent de y.

Vocabulaire :
• $f : E \longrightarrow F$ se lit "f est une application de E vers F" ou encore "f est une application définie sur E à valeurs dans F".
• $x \longmapsto f(x)$ se lit "à x est associé son image $f(x)$".

Lorsque f n'est pas définie sur E tout entier, on dit que f est une **fonction**, mais les confusions de vocabulaire entre applications et fonctions sont tolérées cette année.

⚠ On suppose donc dans tout ce chapitre que les applications sont définies sur E tout entier.
On ne donnera donc pas l'ensemble de définition de f, puisque ce sera à chaque fois E tout entier.

Si à chaque $x \in E$ la "relation" associe plusieurs éléments de F, on ne parle pas d'**application** mais de **correspondance** de E vers F (mais ce n'est pas du tout au programme).

Exemple **:** On associe à $x \in \mathbb{R}$ sa valeur absolue : c'est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exemple **:** On associe à $n \in \mathbb{N}$ ses diviseurs positifs : c'est une correspondance de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

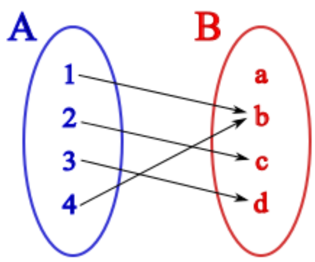
Exemple **:** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + xy$ est une application.

Définition 28 Graphe d'une application
Le graphe de f est le sous-ensemble de $E \times F$ donné par :

$$G = \left\{(x, f(x)) \in E \times F /\ x \in E\right\}$$

Notation : On note $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble de toutes les applications définies sur E à valeurs dans F.

Une application peut être représentée par un diagramme :



Sur le diagramme précédent on voit qu'un élément de l'ensemble d'arrivée peut n'avoir aucun antécédent, ou en avoir plusieurs.

⚠ Important : lorsque $f : E \longrightarrow F$, ie f va de E vers F, on suppose en particulier que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in F$$

Définition 29 Égalité de deux applications.
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$ sont deux applications. On dit que f et g sont égales, et on le note $f \equiv g$, lorsque $E = E'$, $F = F'$ et :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

En particulier, si $E = E'$ et $F = F'$ alors $f \not\equiv g$ si et seulement si : $\exists x \in E$; $f(x) \neq g(x)$.

⚠ Par exemple, on considère que les applications $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ sont différentes.

Définition 30 Applications constantes.
Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite constante lorsqu'il existe $a \in F$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = a$$

On dit alors que f est constante égale à a.

Définition 31 Application identité.
Si E est un ensemble on définit l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{array}$$

Nous verrons plus loin qu'elle joue le rôle d'élément neutre pour la loi de composition.

Définition 32 Restriction
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
1) Si $E_1 \subseteq E$ alors on appelle restriction de f à E_1, notée $f_{|E_1}$, l'application :

$$f_{|E_1} : \begin{array}{rcl} E_1 & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f_{|E_1}(x) = f(x) \end{array}$$

On a donc : $\forall x \in E_1,\ f_{|E_1}(x) = f(x)$.
2) Soient $E_1 \subseteq E$ et $F_1 \subseteq F$ tel que : $\forall x \in E_1,\ f(x) \in F_1$.
On appelle restriction de f à E_1 au départ et à F_1 à l'arrivée, notée $f_{|E_1}^{|F_1}$, l'application :

$$f_{|E_1}^{|F_1} : \begin{array}{rcl} E_1 & \longrightarrow & F_1 \\ x & \longmapsto & f_{|E_1}^{|F_1}(x) = f(x) \end{array}$$

On a : $\forall x \in E_1,\ f_{|E_1}(x) = f(x)$.

***Exemple*:** $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être restreinte à $[0,\pi[$ au départ et à $[0,1]$ à l'arrivée. La restriction est alors notée $\sin_{|[0,\pi[}^{|[0,1]}$.

Définition 33 Prolongement
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
1) Si $E \subseteq E_2$ alors on appelle prolongement de f à E_2 toute application $g : E_2 \longrightarrow F$ telle que $g_{|E} = f$ ie telle que : $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.
2) Si $E \subseteq E_2$ et $F \subseteq F_2$, alors on appelle prolongement de f à E_2 au départ et F_2 à l'arrivée, toute application $g : E_2 \longrightarrow F_2$ telle que $g_{|E}^{|F} \equiv f$ ie telle que : $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.

4.2 Loi de composition

Définition 34 Composée d'applications.
Soient deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ telle que $F \subseteq F'$. On définit l'application composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g"] & G \\ E \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

⚠ ATTENTION : ne pas écrire $g(x) \circ f(x)$ à la place de $g \circ f(x)$!
En effet la notation $g(x) \circ f(x)$ n'a pas de sens, et tout calcul qui l'emploi est donc irrémédiablement faux/

Proposition 35 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a $f \circ \mathrm{id}_E \equiv f$ et $\mathrm{id}_F \circ f \equiv f$.

Proposition 36 On se donne trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$.
On a la propriété d'associativité : $h \circ (g \circ f) \equiv (h \circ g) \circ f$.

On peut donc sans ambiguité utiliser la notation $h \circ g \circ f$ (les parenthèses sont omises).
On a alors pour $x \in E$: $h \circ g \circ f(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$.

4.3 Injection, surjection, bijection

Définition 37 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est injective sur E (ou que f est une injection) lorsque :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

ou encore par contraposée :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Deux points distincts ont donc toujours des images distinctes.
De manière équivalente ont peut dire que les points de F ont au plus un antécédent par f.

<u>Rédaction</u> : Pour montrer que f est injective sur E on fixe x_1 et x_2 éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On doit alors montrer que $x_1 = x_2$.
Pour montrer que f n'est pas injective sur E on cherche deux éléments distincts x_1 et x_2 dans E tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

***Exemple* :** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ est injective sur $\mathbb{R}^+$.

Définition 38 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est surjective de E sur F (ou que f est une surjection) lorsque :

$$\forall y \in F, \exists x \in E / \ y = f(x)$$

De manière équivalente on peut dire que les points de F ont tous au moins un antécédent dans E.

<u>Rédaction</u> : Pour montrer que f est surjective de E sur F on fixe y élément de F. On doit alors trouver au moins un x élément de E tel que $f(x) = y$.
Pour montrer que f n'est pas surjective de E sur F on cherche y élément de F qui n'a pas antécédent par f dans E, ie tel que $f(x) \neq y$ pour tout $x \in E$.

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$.

⚠ Attention à la subtilité suivante : si $x \in E$ on peut toujours poser $y = f(x)$ et on définit $y \in F$.
Par contre si $y \in F$, on ne peut pas en général définir $x \in E$ en posant $y = f(x)$. En effet ceci suppose que y a un antécédent par f. Si f est surjective, il est possible de définir x en posant $y = f(x)$, mais il est plus clair de dire « on note x un antécédent de y par l'application surjective f ».

Définition 39 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est bijective de E sur F (ou que f est une bijection) lorsque f est à la fois injective et surjective :

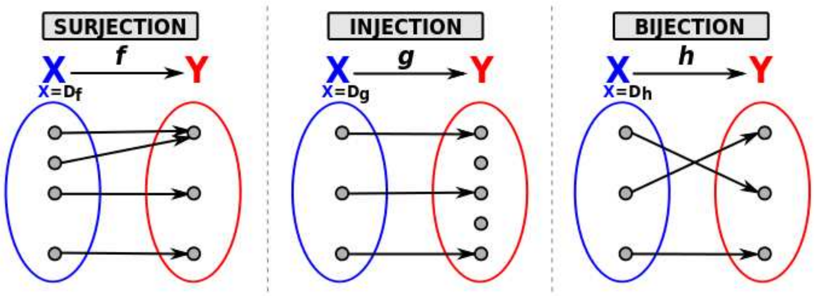
$$\forall y \in F, \exists! x \in E / \ y = f(x)$$

Un point de F a donc toujours un unique antécédent dans E.

Rédaction :

1. Pour monter que f est bijective de E sur F on fixe y élément de F. On doit alors trouver un unique x élément de E tel que $f(x) = y$.
2. On peut aussi procéder en deux temps en montrant que f est injective, puis surjective.

Le diagramme suivant illustre ces notions d'injection/surjection/bijection.

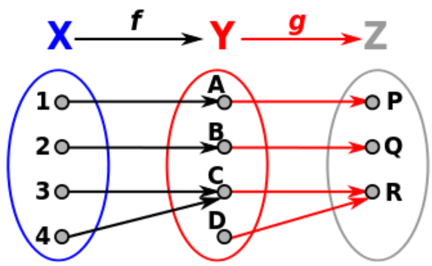


⚠ Attention, en général une application n'est ni injective, ni surjective. Considérer par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Exemple: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$, $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ n'est pas non plus bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$, mais $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $h(x) = x^2$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 40 Soient deux applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$.
(i) Si f est injective sur E et g injective sur F, alors $g \circ f$ est injective sur E.
(ii) Si f est surjective de E sur F et g surjective de F sur G, alors $g \circ f$ est surjective de E sur G.
(iii) Si f est bijective de E sur F et g bijective de F sur G, alors $g \circ f$ est bijective de E sur G.

Le diagramme suivant donne un exemple montrant qu'on peut avoir $g \circ f$ et g surjectives, mais f non surjective.



Définition 41 Inversibilité pour la loi de composition.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit qu'elle est inversible pour la loi de composition lorsqu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f \equiv \mathrm{id}_E$ et $f \circ g \equiv \mathrm{id}_F$.
Une telle fonction g est appelée application réciproque de f.

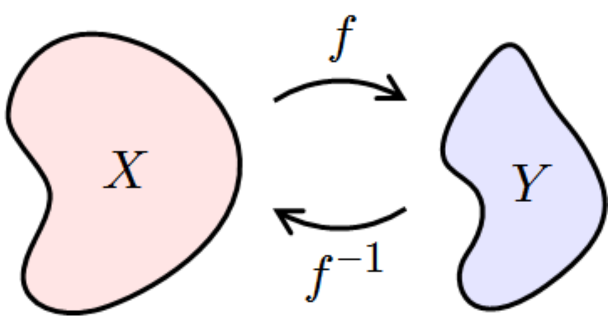
Proposition 42 Unicité de l'inverse pour la loi de composition.
Soit $f : E \longrightarrow F$ inversible pour la loi de composition.
Alors elle admet une unique application réciproque : on la note f^{-1}.

Si elle existe, l'application réciproque de $f : E \longrightarrow F$ a donc les propriétés suivantes :
- $f^{-1} : F \longrightarrow E$
- $f^{-1} \circ f \equiv \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} \equiv \mathrm{id}_F$
- Pour $x \in E$ et $y \in F$: $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

⚠ Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ (ou dans $\mathbb{C}^*$), ne pas confondre f^{-1} avec l'inverse de f pour la multiplication !
Pour cette raison, l'inverse de f pour la multiplication est souvent notée $\frac{1}{f}$.

Théorème 43 Théorème de la bijection réciproque.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a équivalence de :
(i) f est bijective de E sur F ;
(ii) f est inversible pour la loi de composition.
L'application f^{-1} est donc bijective de F sur E, on l'appelle aussi la bijection réciproque de f.
De plus, $\left(f^{-1}\right)^{-1} \equiv f$.

Sur un diagramme, l'inverse f correspond à inverser le sens des flèches.



On dispose donc de trois méthodes pour montrer qu'une application f est bijective :

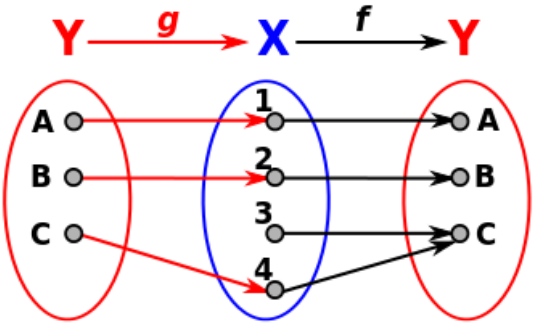
1. Montrer que f est injective et surjective.
2. Pour $y \in F$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$.
   Si on obtient une unique solution, on montre que f est bijective. De plus, l'expression obtenue donne la fonction $f^{-1} : x = f^{-1}(y)$.
3. On cherche une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g \equiv \mathrm{id}_F$ et $g \circ f \equiv \mathrm{id}_E$.
   Si on trouve une telle fonction, on montre que f est bijective. De plus $f^{-1} = g$.

Remarquez que les deux dernières méthodes donne aussi la fonction réciproque de f, en plus de la bijectivité.

***Exemple*:** $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto e^{x^2} \in [1, +\infty[$ est bijective de réciproque $f^{-1} : y \in [1, +\infty[\longmapsto \sqrt{\ln(y)} \in \mathbb{R}^+$ (utiliser 2.).

***Exemple*:** id_E est bijective et $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$ (utiliser 3.).

⚠ On peut avoir $f \circ g \equiv \mathrm{id}_F$ et $g \circ f \not\equiv \mathrm{id}_E$. Dans ce cas f n'est pas une bijection. Considérer $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définies par $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = x^2$. On peut aussi visualiser cette propriété sur le diagramme suivant :



Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a aussi une quatrième méthode pour démontrer la bijectivité qui repose sur le théorème suivant.

Théorème 44 Théorème de la bijection monotone
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :
(i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$;
(ii) f est continue sur I ;
(iii) f est strictement monotone sur I.
Alors f induit une bijection de I sur un intervalle J, à déterminer avec le tableau de variations.

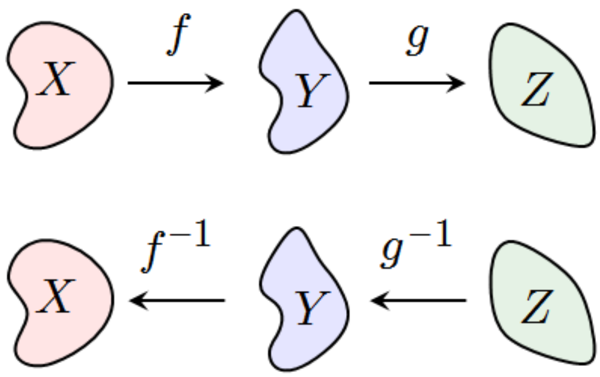
***Exemple*:** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^n \in \mathbb{R}$ induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 45 Fonction racine n-ième
La bijection réciproque de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^n \in \mathbb{R}_+^*$ est appelée fonction racine n-ième notée $\sqrt[n]{\cdot}$.
Pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on a : $x^n = y \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.

⚠ $\sqrt[n]{\ }$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$. Par exemple $\sqrt[3]{-1}$ n'est pas défini, bien que $(-1)^3 = -1 \dots$

Proposition 46 Bijection réciproque d'une composée.
Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} \equiv f^{-1} \circ g^{-1}$.

L'ordre a été inversé, mais cela paraît logique intuitivement : pour inverser f composée par g, il faut inverser g puis ensuite f.



4.4 Fonctions caractéristiques

Définition 47 Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application :

$$\begin{array}{rrcl} 1_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & 1_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

***Exemple* :** La fonction $1_\emptyset$ est constante égale à 0, et la fonction 1_E est constante égale à 1.

Proposition 48 Règles de calcul.
Soient A, B parties de E.

1. On a : $A \subseteq B \iff \forall x \in E,\ 1_A(x) \leq 1_B(x)$,
   et : $A = B \iff \forall x \in E,\ 1_A(x) = 1_B(x)$;
2. $\forall x \in E,\ 1_{\overline{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$;
3. $\forall x \in E,\ 1_{A \cap B}(x) = 1_A(x) \times 1_B(x)$;
4. $\forall x \in E,\ 1_{A \cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_A(x) \times 1_B(x)$.

***Exemple* :** Redémontrer les lois de Morgan à l'aide des fonctions caractéristiques.

4.5 Images directe et réciproque

Définition 49 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si $A \subseteq E$, on appelle image directe de A par f l'ensemble :

   $$f(A) = \left\{f(x) / x \in A\right\} = \text{ ensemble des } y \in F \text{ qui ont un antécédent par } f \text{ dans } A$$

   On a $f(A) \subseteq F$.
   De plus, si $y \in F$: $y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A / y = f(x)$
2. Si $B \subseteq F$, on appelle image réciproque de B par f l'ensemble :

   $$f^{-1}(B) = \left\{x \in E / f(x) \in B\right\} = \text{ ensemble des } x \in E \text{ qui ont leur image dans } B$$

   On a $f^{-1}(B) \subseteq E$.
   De plus, si $x \in E$: $x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$.

On a $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

***Exemple* :** Vérifier que $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ et que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$.

Proposition 50 Si $f : E \longrightarrow F$ est une application, alors f induit une surjection de E sur $f(E)$.
De plus, f est surjective de E sur F si et seulement si $f(E) = F$.

f induit une surjection signifie que c'est une restriction de f qui est surjective : ici $f_{|E}^{|f(E)}$.

Définition 51 Partie stable
Soient $f : E \longrightarrow E$ une application et $A \subseteq E$. On dit que A est stable par f lorsque $f(A) \subseteq A$, ie $\forall x \in A,\ f(x) \in A$.

***Exemple* :** Pour l'application $x \longmapsto x^2$, les parties suivantes sont-elles stables : $A = \mathbb{R}^+$, $B = [0,2]$, $C = [2,+\infty[$?

5 Exercices

Exercice 1 Écrire avec les quantificateurs et les connecteurs appropriés les propositions mathématiques suivantes :

1. Il existe un rationnel compris entre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
2. Il n'existe pas d'entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.
3. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers naturels sont nuls.

Exercice 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 3 Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon donner leur négation :

1. $\exists A \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} \leqslant A$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{n} \leqslant x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{n} \leqslant x$

Exercice 4 Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on pose :

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

1. Montrer que : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
2. Soient A, B et C trois parties de E vérifiant : $A \Delta B = A \Delta C$. Montrer que : $B = C$.
   Si $A \cup B = A \cup C$ peut-on dire que $B = C$?

Exercice 5

1. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$; a, b, c, d étant distincts deux à deux.
2. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.

Exercice 6 Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que : $\overline{A} \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = E$.
2. Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad B = C.$
3. Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{l} A \cup B = A \cap C \\ A \cap B = A \cup C \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad A = B = C.$

Exercice 7

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.
2. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $u_0 = u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$$

Exercice 8 On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + 2x \end{array}$$

1. Est-ce que l'application f est injective ? surjective ? bijective ?
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement positive.

Exercice 9 On considère l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

1. Est-elle injective sur $\mathbb{R}$? surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que $f_{|\mathbb{R}^+}$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f_{|\mathbb{R}^+}^{-1}$.
3. De même montrer que $f_{|\mathbb{R}^-}$ est bijective de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f_{|\mathbb{R}^-}^{-1}$.
4. f est-elle injective sur $\mathbb{N}$? bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$? de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$?

Exercice 10 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f \equiv Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. On suppose que $g \circ f \equiv Id_E$, et que l'une des deux applications f ou g est bijective. Montrer que l'autre est aussi bijective.
3. Monter que si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Exercice 11 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. On considère l'application suivante :

$$h: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & \big(f(x), g(x)\big) \end{array}$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si h est surjective, alors f et g le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Dans la recherche de contre-exemples, on pourra considérer les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}^+$ et $g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow (x-1)^2 \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 12 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A_1 et A_2 deux parties de E et B_1 et B_2 deux parties de F.

1. Montrer que :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \text{ et } f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

2. Montrer que :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(B_1 \cup B_2) & = & f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \text{ et} \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) & = & f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{array}$$

Exercice 13 Soient E un ensemble non vide et $f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \cap B = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $f(\emptyset) = 0$
2. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$
3. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \subset B \implies f(A) \leqslant f(B)$

Exercice 14 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A une partie de E et B une partie de F.
a) Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ et que $f^{-1}\left(f(A)\right) \supset A$.
b) On suppose f surjective. Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.
c) On suppose f injective. Montrer que $f^{-1}\left(f(A)\right) = A$.
d) On suppose f bijective. Vérifier que l'image réciproque de B par f est égale à l'image de B par l'application réciproque f^{-1}. [*C'est heureux car les deux ensembles sont notés de la même manière !*]

Exercice 15 Soit E un ensemble non vide. Soit $\mathscr{F}$ une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$.On dit que $\mathscr{F}$ est un filtre sur E si : $\begin{cases} (a) & \forall (X,Y) \in \mathscr{F}^2,\ X \cap Y \in \mathscr{F} \\ (b) & \forall X \in \mathscr{F}, \forall Y \in \mathscr{P}(E) :\ X \subset Y \Longrightarrow Y \in \mathscr{F} \\ (c) & \emptyset \notin \mathscr{F} \end{cases}$

1. Que peut-on dire d'une famille non vide $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(E)$ ne vérifiant que les axiomes (a) et (b) ?
2. $\mathscr{P}(E)$ est-il un filtre sur E ? A quelle condition $\mathscr{P}(E) - \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si $\mathscr{F}$ est un filtre sur E, alors $E \in \mathscr{F}$.
4. Soit A une partie non vide de E. Montrer que $\mathscr{F}_A = \{X \in \mathscr{P}(E);\ A \subset X\}$ est un filtre sur E.