Chapitre 10

Variables aléatoires discrètes

On considère une expérience aléatoire modélisée par un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un univers **fini**.

1 Variables aléatoires discrètes finies

1.1 Définitions

On note $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ avec $N = \text{Card}(\Omega)$, et on choisit comme tribu des évènements $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.

Définition 1 Variable aléatoire discrète finie
On appelle variable aléatoire réelle discrète finie, en abrégé VARD finie, toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega_1), \ldots, X(\omega_N)\}$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

<u>**Notations**</u> **:** L'ensemble $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal $N = \text{Card}(\Omega)$:

$$\text{Card}\big(X(\Omega)\big) \leq \text{Card}(\Omega)$$

On note $n = \text{Card}\big(X(\Omega)\big)$ et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

***Exemple* :** On lance deux dès cubiques distinguables : $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et $N = \text{Card}(\Omega) = 36$.
On note X = Nombre de 6 obtenus. Alors X est une VARD finie et $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $n = \text{Card}\big(X(\Omega)\big) = 3$.

⚠ ATTENTION : ne pas confondre variable aléatoire et évènement. Une variable aléatoire est un **nombre aléatoire**, et un évènement est un **prédicat aléatoire**, c'est-à-dire une phrase qui peut être vraie ou fausse.
Sur l'exemple précédent, on ne peut pas dire que « Nombre de 6 obtenus » est vrai ou faux, X n'est donc pas un évènement.

***Exemple* :** On considère une urne de 10 boules, composée de 6 boules blanches et 4 rouges. On effectue p tirages successifs d'une boule avec remise : $\Omega = [\![1, 10]\!]^p$ (les boules sont numérotées) et $N = \text{Card}(\Omega) = 10^p$.
On note X = Nombre de boules rouges obtenues. Alors X est une VARD finie et $X(\Omega) = [\![0, p]\!]$ et $n = \text{Card}\big(X(\Omega)\big) = p + 1$.

1.2 Évènements associés à une VARD

Notation : Si X est une VARD et A une partie de $\mathbb{R}$:

$$X^{-1}(A) = \left\{\omega \in \Omega \middle/ X(\omega) \in A\right\}$$

est un élément de $\mathscr{F}$, ie $X^{-1}(A)$ est un évènement. Cet évènement sera noté plus simplement $[X \in A]$. On a donc :

$$[X \in A] = \left\{\omega \in \Omega \middle/ X(\omega) \in A\right\}$$

Cas particuliers :
- Si $A = \{a\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $[X \in \{a\}]$ est noté plus simplement $[X = a]$.
- Si $A =]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $\big[X \in]-\infty, a]\big]$ est noté plus simplement $[X \leq a]$.
- Si $A = [a, b[$ où $(a, b) \in \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)^2$, alors $\big[X \in [a, b[\big]$ est noté plus simplement $[a \leq X < b]$

etc...

Notation : Si X est une VARD et A une partie de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $[X \in A]$ est un évènement, et on peut donc calculer $\mathbb{P}\big([X \in A]\big)$.
Pour simplifier les notations on notera $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\big([X \in A]\big)$.

***Exemple* :** On lance simultanément deux dès distinguables : $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.
On pose X = Somme des deux chiffres obtenus. On a alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et on peut considérer les évènements :
$[X = 11] = \big\{(6, 5); (5, 6)\big\}$ donc $\mathbb{P}(X = 11) = \dfrac{2}{36}$
$[X > 10] = \big\{(6, 5); (5, 6); (6, 6)\big\} = [X = 11] \cup [X = 12]$ donc $\mathbb{P}(X > 10) = \dfrac{3}{36}$
$[X \leq 1] = \emptyset$ évènement impossible, donc $\mathbb{P}(X \leq 1) = 0$
$[X \leq 12] = \Omega = [X \geq 0]$ évènement certain, donc $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$
On peut comparer les évènements associés à X.
Par exemple $[X \leq 5] \subseteq [X \leq 7]$ donc $\mathbb{P}(X \leq 5) \leq \mathbb{P}(X \leq 7)$:
en effet $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq 5 \Longrightarrow X(\omega) \leq 7$.
De plus $[X \geq 4] = [X > 3]$, donc $\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X > 3)$, car : $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 4 \Longleftrightarrow X(\omega) > 3$.
De même $[X = 3] = [X \geq 3] \cap [X < 4]$ donc $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}\big([X \geq 3] \cap [X < 4]\big)$.
Il faut bien comprendre que tous ces résultats viennent du fait que X ne prend que des valeurs **entières**.

Théorème 2 Système complet d'évènements associés à une VARD
Si X est une VARD alors la famille $\big([X = x]\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un s.c.e..Autrement dit, si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors la famille $\big([X = x_k]\big)_{1 \leq k \leq n} = \big([X = x_1], [X = x_2], \ldots, [X = x_n]\big)$ est un s.c.e..

⚠ ATTENTION ! Si A est une partie de $\mathbb{R}$, $[X \in A]$ est un évènement, ie un élément de $\mathscr{F}$, et on peut donc calculer $\mathbb{P}(X \in A)$. Par contre $\mathbb{P}(X)$ ne veut absolument rien dire...en effet X n'est pas un **évènement** mais une **variable aléatoire**.

1.3 Loi de probabilité d'une VARD finie

Définition 3 Loi de probabilité d'une VARD
Si X est une VARD sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on appelle loi de probabilité de X l'application

$$\mathscr{L}_X : \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X=x) \end{array}$$

La loi de probabilité $\mathscr{L}_X$ est aussi notée $\mathbb{P}^X$.

⚠ ATTENTION ! Avant de déterminer la loi de X, il est donc *indispensable* de déterminer $X(\Omega)$, c'est-à-dire les valeurs prises par la VARD X.

Si on note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, déterminer la loi de X c'est calculer $\mathbb{P}(X = x_k)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Pour de petites valeurs de n, on peut représenter les résultats sous forme d'un tableau à une entrée :

x	x_1	x_2	$\dots \quad \dots$	x_n
$\mathbb{P}(X=x)$	?	?		?

ou d'un diagramme en bâtons.

Définition 4 Égalité en loi
Si X et Y sont deux VARD, définies chacune sur un espace probabilisé, on dit que X et Y sont égales en loi lorsque $\mathscr{L}_X = \mathscr{L}_Y$.
On le note $X \stackrel{\mathscr{L}}{=} Y$.

⚠ ATTENTION : $X \stackrel{\mathscr{L}}{=} Y$ ne signifie pas que $X = Y$, même si X et Y sont définies sur le même espace probabilisé (ie associée à la même expérience aléatoire). Considérer par exemple le lancer d'un dé, $X = 1$ si le chiffre obtenu est pair et 0 sinon, et $Y = 1$ si le chiffre obtenu est impair et 0 sinon.

Proposition 5 Propriétés élémentaires d'une loi de probabilité
Soit X une VARD. On a alors :
(i) $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \in [0,1]$;
(ii) $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Donc si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors :

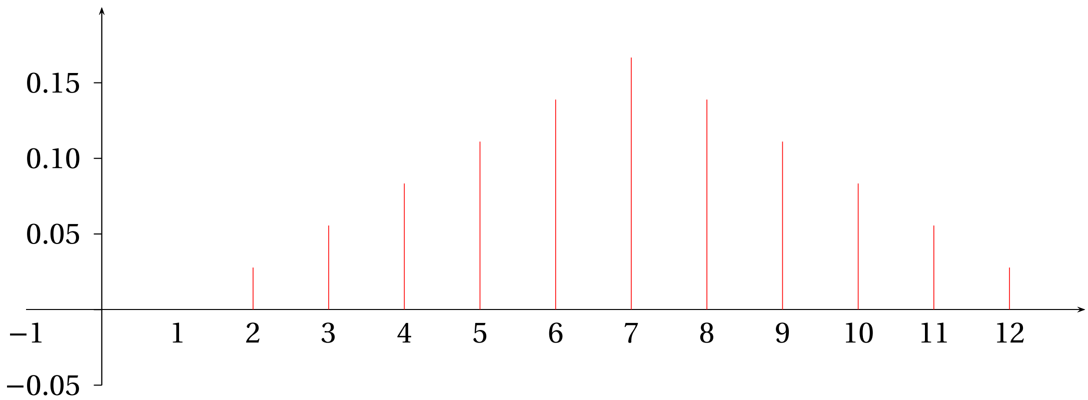
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k) = 1$$

Dans le tableau représentant la loi de X, la somme des cases de la seconde linge doit donc être égale à 1.

Exemple **:** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 6 Construction d'une VARD finie ayant une loi de probabilité donnée
On se donne des réels $p_1, \ldots, p_n$, vérifiant :
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \geq 0$;
- $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Alors pour tous réels deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_n$, il existe une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ telle que :
$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.
Et donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k \in [0, 1]$.

Il n'y a unicité, ni de $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, ni de la VARD X.

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une VARD finie X, à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, et de loi donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

1.4 Fonction de répartition d'une VARD finie

Définition 7 Fonction de répartition d'une VARD
Soit X une VARD finie.
On appelle fonction de répartition de X la fonction

$$F_X \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, 1] \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leq t) \end{array}$$

Théorème 8 Calcul de la fonction de répartition d'une VARD
Si X est une VARD finie alors, alors F_x est une fonction constante par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Plus précisément, si $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ avec $x_1<x_2<\dots<x_n$, on a :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ F_x(t)=\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ \text{tq } x_k\le t}}\mathbb{P}(X=x_k)=\begin{cases}0 & \text{si } t<x_1\\ \mathbb{P}(X=x_1) & \text{si } x_1\le t<x_2\\ \mathbb{P}(X=x_1)+\mathbb{P}(X=x_2) & \text{si } x_2\le t<x_3\\ \mathbb{P}(X=x_1)+\mathbb{P}(X=x_2)+\mathbb{P}(X=x_3) & \text{si } x_3\le t<x_4\\ \vdots & \vdots\\ \mathbb{P}(X=x_1)+\dots+\mathbb{P}(X=x_{n-1}) & \text{si } x_{n-1}\le t<x_n\\ 1 & \text{si } x_n\le t\end{cases}$$

On peut retenir que $[X\le x_k]=\bigcup_{i=1}^{k}[X=x_i]$ et donc :

$$F_x(x_k)=\mathbb{P}(X\le x_k)=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X=x_i)=\mathbb{P}(X=x_1)+\mathbb{P}(X=x_2)+\dots+\mathbb{P}(X=x_k)$$

Théorème 9 La fonction de répartition caractérise la loi

1. Si $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ avec $x_1<x_2<\dots<x_n$, alors $X(\Omega)$ = ensemble des points de discontinuité de F_X et :

$$\forall k\in[\![2,n]\!],\quad \mathbb{P}(X=x_k)=F_X(x_k)-F_X(x_{k-1})$$

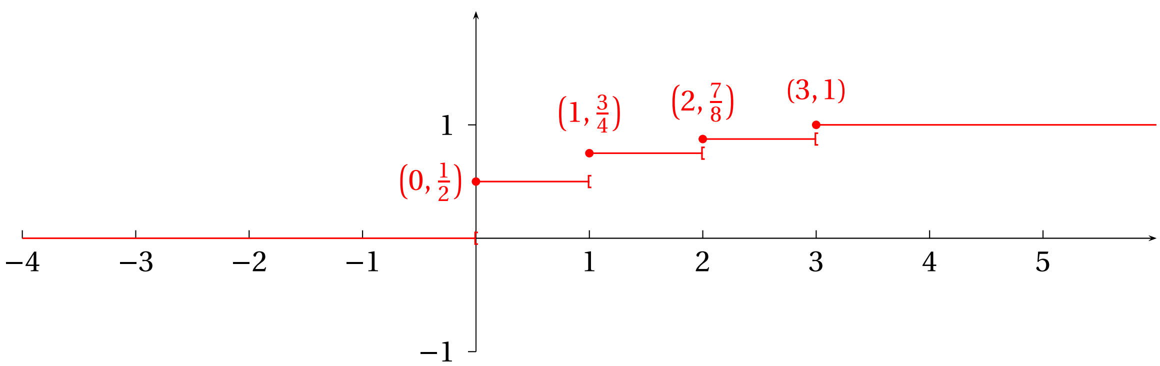
et $\mathbb{P}(X=x_1)=F_X(x_1)$.

2. Si X et Y sont deux VARD finies, alors :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad F_X(t)=F_Y(t)\iff X\overset{(\mathscr{L})}{=}Y$$

Ce résultat est fondamental : il indique que pour définir la loi d'une VARD finie, il suffit de donner sa fonction de répartition.

Exemple **:** On définit $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par son graphe :



Cette fonction définie la loi d'une VARD X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, telle que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Cas particulier où $X(\Omega) \subseteq [\![0, n]\!]$: Dans ce cas on utilise les formules suivantes (à savoir redémontrer), valables pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \le k) - \mathbb{P}(X \le k - 1) = \mathbb{P}(X \ge k) - \mathbb{P}(X \ge k + 1)$$

et :

$$\mathbb{P}(X \le k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \ge k) = \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(X = j)$$

***Exemple* :** Dans une urne de n boules numérotées, on effectue n tirages d'une boule sans remise (l'urne est vidée).
On note X = nombre de tirages nécessaires pour obtenir un numéro supérieur ou égal au précédent, avec la convention que $X = n + 1$ si ceci ne se produit pas au bout des n tirages.
Donner la loi de X.

1.5 Transfert de loi

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

On considère une VARD $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$. On a alors le schéma de composition :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On admettra que l'application $Y = f \circ X$ est aussi une VARD sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On la note plus simplement $Y = f(X)$.

Connaissant la loi de X et l'expression de la fonction f, nous souhaiterions déterminer la loi de la VARD $Y = f(X)$: c'est ce qu'on appelle un **transfert de loi** (la loi de X est transférée par la fonction f).

Valeurs prises par Y : Si X est une VARD finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $Y(\Omega) = \big\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\big\}$. On peut aussi noter $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$; dans ce cas $p \le n$ (car f peut ne pas être injective).

***Exemple* :** $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $Y = X^2$ donne $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

On peut maintenant s'intéresser à la loi de Y. Pour cela il est important de comprendre le point suivant : si on prend $y \in Y(\Omega)$ une valeur prise par la VARD Y, alors, par définition, y a un antécédent par f dans $X(\Omega)$: $\exists x \in X(\Omega)$ tel que $y = f(x)$. Et comme f est en général non injective, il y a plusieurs valeurs de x possibles, voire même une infinité !

***Exemple* :** Sur l'exemple précédent, 1 a deux antécédents : -1 et 1.

Théorème 10 Formule de transfert de loi
La loi de $Y = f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On somme sur tous les antécédents de y.

Exemple **:** Si la loi de X est donnée par :

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

et si $Y = X^2$, alors $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ et :

k	0	1	4
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

2 Espérance mathématique d'une VARD

2.1 Définition

Définition 11 Espérance mathématique d'une VARD
Si X est une VARD finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors on appelle espérance de X le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

On peut aussi écrire la formule de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple **:** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Puisque X est une VARD finie, $\mathbb{E}(X)$ existe et :

$$\mathbb{E}(X) = 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36} = 7$$

C'est la notion d'espérance qui justifie l'introduction de la notion de variable aléatoire en plus de celle d'évènements. Par exemple si on lance n fois une pièce, et si on note E_i = « le i-ième lancer donne pile » et X = « nombre de piles obtenus sur les n lancers » alors l'évènement $[X = k]$ se décompose en unions/intersections d'évènements E_i. On peut donc se demander quel est l'intérêt d'utiliser la VARD X...? L'intérêt est qu'on voudrait calculer le nombre moyen de piles obtenus sur les n lancers, ie calculer $\mathbb{E}(X)$, et cette quantité ne s'exprime pas en fonction des E_i !

2.2 Théorème de transfert

On reprend les notations du paragraphe sur le transfert de loi :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f\circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On a vu que la loi de la VARD $Y = f(X)$ se calcule par la formule :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \text{tq } f(x)=y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On veut cette fois calculer son espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \left[y \times \left(\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ \text{tq } f(x)=y}} \mathbb{P}(X = x) \right) \right]$$

On peut voir que le calcul est compliqué. On va donc essayer d'avoir une formule simple, donnant $\mathbb{E}(Y)$ connaissant la loi de X, et **sans avoir à calculer la loi de Y.**

Théorème 12 Théorème de transfert
Soit X une VARD finie et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$.
Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors $Y = f(X)$ est aussi une VARD finie et :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

Ce résultat sera très utile en pratique, car dans beaucoup de cas on ne sait pas calculer simplement la loi de la VARD $Y = f(X)$.

On peut aussi écrire la formule de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x)$$

***Exemple* :** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chiffres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Puisque X est une VARD fine, $\mathbb{E}(X^2)$ existe et :

$$\mathbb{E}(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + \ldots + 12^2 \times \frac{1}{36} = \frac{329}{6}$$

Corollaire 13 Linéarité de l'espérance (version 1)
Soit X une VARD finie. Alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}(aX+b)$:

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

En particulier si $a = 0$, on a pour tout $b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}(b) = b$. Et donc pour $b = \mathbb{E}(X)$, on obtient $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X)\big) = \mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = 0$.

Définition 14 VARD centrée

1. On appelle VARD finie centrée une VARD finie X telle que $\mathbb{E}(X) = 0$.
2. Si X est une VARD finie, on appelle VARD centrée associée à X la VARD $Y = X - \mathbb{E}(X)$.

2.3 Variance d'une VARD finie

Définition 15 Variance d'une VARD finie
Soit X une VARD finie. On appelle variance de X, notée $V(X)$ ou $\mathrm{Var}(X)$:

$$V(X) = \mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big]$$

La variance sert à mesurer la dispersion quadratique de X autour de sa valeur moyenne (= son espérance).

Théorème 16 Règles de calcul de la variance
Soit X une VARD finie.

1. $V(X) \geq 0$;
2. $V(X) = 0 \iff X$ est constante.
   Dans ce cas : $X = \mathbb{E}(X)$.
3. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Théorème 17 Formule de Koenig-Huyghens
Soit X une VARD finie. Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

Puisque $V(X) \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left(X^2\right) \geq \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$. Plus généralement, on peut montrer que si φ est une fonction numérique convexe, alors $\mathbb{E}\left(\varphi(X)\right) \geq \varphi\left(\mathbb{E}(X)\right)$ (inégalité de Jensen), mais c'est une autre histoire...
C'est cette formule qu'on utilise en pratique pour calculer la variance d'une VARD finie.

***Exemple* :** On lance deux dés distinguables et on note X = Sommes des deux chifres obtenus. Alors $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ et la loi de probabilité de X est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Puisque X est une VARD fine, $V(X)$ existe et :

$$V(X) = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}$$

Définition 18 Écart-type d'une VARD
Soit X une VARD finie. On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Contrairement à la variance, l'écart-type possède la même unité que X, et s'interprète donc mieux en pratique. Il sert à mesurer la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

Définition 19 VARD centrée réduite Soit X une VARD finie, non presque sûrement constante.

1. On dit que X est une VARD centrée réduite lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
2. On appelle VARD centrée réduite associée à X la VARD : $X^* = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

En effet si X^* est une VARD centrée réduite.

3 Lois usuelles

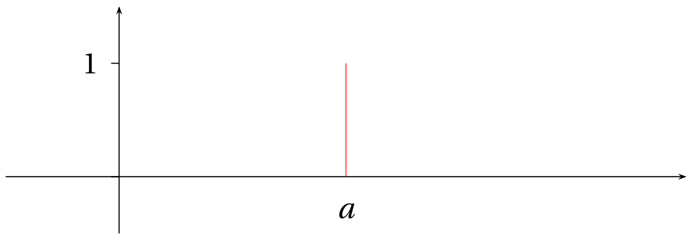
Dans tout ce paragraphe X est une VARD définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Loi certaine

Définition 20 VARD de loi certaine
X suit la loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$, lorsque $X = a$ $\mathbb{P}$-p.s., ie $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

X est donc une VARD finie.

On obtient le diagramme en bâtons :



Par abus de notations, on peut considérer que $X(\Omega) = \{a\}$.

Théorème 21 Espérance et variance d'une VARD de loi certaine
Soit X une VARD de loi certaine de paramètre $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = a \qquad \text{et} \qquad V(X) = 0$$

Théorème 22 Caractérisation de la loi certaine
Soit X une VARD finie. Alors :

$$X \text{ suit une loi certaine} \Longleftrightarrow V(X) = 0$$

et dans ce cas le paramètre est $a = \mathbb{E}(X)$.

3.2 Loi uniforme

Définition 23 VARD de loi uniforme
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ finie et non vide. On dit que X suit la loi uniforme sur A lorsque $X(\Omega) = A$ et :

$$\forall a \in A, \quad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{\text{Card}(A)}$$

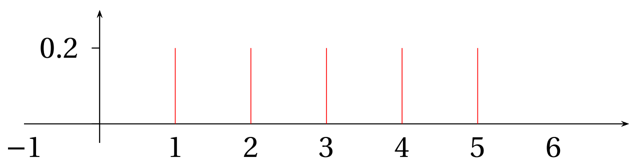
On le note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(A)$.

X est donc une VARD finie.

Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $n = \text{Card}(A)$, alors : $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(X = a_k) = \dfrac{1}{n}$.

Si A est un singleton, $A = \{a\}$, alors $\mathscr{U}\big(\{a\}\big)$ est la loi certaine de paramètre a.

Pour $\mathscr{U}([\![1, 5]\!])$, on obtient le diagramme en bâtons :



Exemple **:** Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$, alors $X(\Omega) = \llbracket 1,n \rrbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket 1,n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$$

Théorème 24 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$. Alors X :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

⚠ ATTENTION : ces formules sont fausses si $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0,n \rrbracket)$.

Modélisation 1 : On choisit au hasard un nombre dans A, partie finie non vide de $\mathbb{R}$. On note X = Nombre obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}(A)$.

Exemple **:** On dispose d'une urne de 10 boules numérotées. On tire une boule au hasard et on note X = Numéro obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,10 \rrbracket)$.

Modélisation 2 : On se donne A partie finie non vide $\mathbb{R}$, de cardinal n, et on s'intéresse à un élément donné de A noté a_0. On effectue une successions de tirages sans remise d'un élément de A. On note X = Nombre de tirages nécessaires pour obtenir l'élément a_0. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$.

Exemple **:** On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire les cartes une à une sans remise et on note X = Nombre de tirages nécessaires pour obtenir l'as de coeur. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,32 \rrbracket)$.

Exemple **:** Un gardien doit ouvrir une porte dans le noir, avec n clef dont une seule est la bonne. On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef. On suppose que le gardien essaie les clefs une à une, sans utiliser deux fois la même. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ et le nombre moyen d'essais pour trouver la bonne clef est donc $\dfrac{n+1}{2}$.

3.3 Loi de Bernoulli

Définition 25 VARD de loi de Bernoulli
On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \{0,1\}$ et :

$$\mathbb{P}(X=1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

X est donc une VARD finie.

Théorème 26 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{B}(p)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{B}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = pq = p(1-p)$$

Modélisation : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès ou échec.
On note p la probabilité qu'elle donne un succès et $X = \begin{cases} 1 & \text{si l'expérience donne un succès} \\ 0 & \text{si l'expérience donne un échec} \end{cases}$
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

***Exemple* :** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On note $X = \begin{cases} 1 & \text{si la pièce donne Pile} \\ 0 & \text{si la pièce donne Face} \end{cases}$
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

***Exemple* :** On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
On note $X = \begin{cases} 1 & \text{si la carte est un coeur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{4}\right)$.

Théorème 27 Caractérisation de la loi de Bernoulli
Soit X une VARD. Alors :

$$X \text{ suit une loi de Bernoulli} \Longleftrightarrow X(\Omega) = \{0,1\}$$

et dans ce cas le paramètre est $p = \mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X=1)$.

***Exemple* :** Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

***Exemple* :** Si A est un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \notin \{0,1\}$, alors $X = 1_A$ est une VARD de loi $\mathscr{B}\big(\mathbb{P}(A)\big)$. En particulier on obtient que $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$, formule qui relie probabilité d'un évènement et espérance d'une VARD.

3.4 Loi binomiale

Définition 28 VARD de loi binomiale
On dit que X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

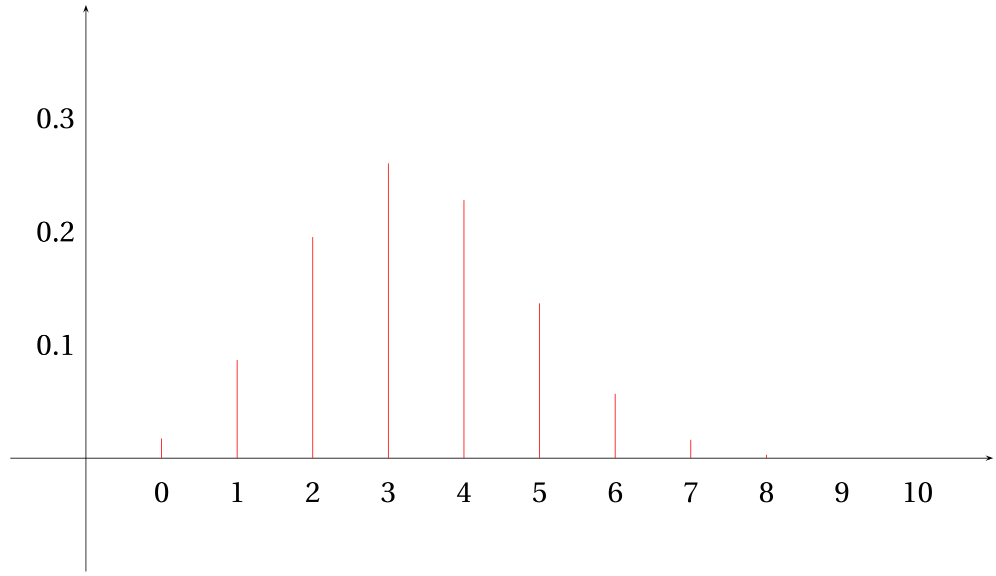
X est donc une VARD finie.

On a $\mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$.

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k \notin [\![0,n]\!]$, on a par convention $\binom{n}{k} = 0$. De plus, on a aussi $\mathbb{P}(X = k) = 0$. Donc $\mathbb{P}(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pour $\mathscr{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$, on obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 29 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{B}(n,p)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = npq = np(1-p)$$

<u>Modélisation</u> : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $q = 1 - p$.
On effectue n répétitions indépendantes de cette même expérience.
On note X = Nombre de succès obtenus.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

***Exemple* :** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On la lance n fois de manières indépendantes.
On note X = Nombre de Piles obtenus.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

***Exemple* :** On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{N_1}{N}\right)$.

4 Exercices

Exercice 1 (Lois usuelles)

Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs.
   X = nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos.
   X = nombre de bosses.
3. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et avec remise 10 boules de l'urne.
   X = nombre de boules vertes tirées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques.
   X = nombre de garçons d'une famille de 3 enfants.
5. On suppose que 1% des trèfles possédent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles.
   X = nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 2 (Jeux d'argent)

Un jeu est dit *équitable* losque l'espérance du gain relatif du joueur est nulle. Pour chacun des jeux suivants, déterminer si le jeu est équitable.

1. Le joueur lance 2 dès. S'il sort 7, il gagne 5 euros, sinon il perd 1 euro.
2. Le joueur mise sur rouge ou noir à la roulette au casino (composée de 18 rouges, 18 noirs et du zéro qui est vert). Pour une mise donnée, la casino paye deux fois la mise en cas de sortie de la bonne couleur (la mise est perdue dans tous les cas).
3. Toujours à la roulette, il joue un numéro plein : s'il gagne, la casino lui paye 36 fois sa mise en cas de sortie du numéro choisi.
4. Le joueur remplit une grille de loto qui coûte ϵ euros : il choisit 6 numéros entre 1 et 49. Si ses numéros sortent, il gagne un million d'euros.

Exercice 3 Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X son espérance et son écart-type.

Exercice 4 On lance 4 dès équilibrés, on note X ="le nombre de numéros différents sortis". Déterminer la loi de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5 (Plus grand numéro obtenu lors d'un tirage simultané)

On effectue un tirage simultané de n boules dans une urne composée de N boules numérotées de 1 à N. On note X le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de X.
2. En déduire que pour tout $n \in [\![0, N]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.
3. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 6 (Loi hypergéométrique)

1. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule sans remise.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.
2. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue un tirage simultané de n boules.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.
3. On dispose d'une urne de N boules : N_1 boules blanches et N_2 boules noires.
   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
   On note X = Nombre de boules blanches obtenues.
   Déterminer la loi de X.

Exercice 7 (Urne vidée de ses boules blanches)

On considère une urne de taille $N > 1$, contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 < r \leq N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X. Donner son espérance. Même question dans le cas $r = N$.
2. Le cas général : $1 < r < N$.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Soit k l'une de ces valeurs. Vérifier que :
   $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$
3. Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$.

Exercice 8 (n-ième succès lors de tirages sans remise)

Une urne contient $N \geq 1$ boules dont $r \geq 1$ sont rouges et les autres sont blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $n \in [\![1, r]\!]$. On appelle X_n le rang d'apparition de la $n^{\text{ème}}$ boule rouge. Trouver la loi de X_n.
Faire le lien avec l'exercice précédent.

Exercice 9 (Une formule de calcul de l'espérance d'une VARD)

1. Soient $N \in \mathbb{N}$ et X une vard vérifiant : $X(\Omega) \subset [\![0, N]\!]$.
   Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X > k)$.
2. On considère une urne de N boules numérotées. On effectue un tirage simultané de n boules, et on note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 10 (Minimum et maximum lors de tirages simultanés)

On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne ($n < N$) et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Pour $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.

Exercice 11 (Expérience en deux étapes)
On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes numérotées de 1 à n : $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une urne, on note X le numéro de l'urne choisie, puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie, on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$, en déduire la loi de Y.
2. Déterminer l'espérance de Y.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 12 (Fonction génératrice d'une VARD finie)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne X une variable discrète finie à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On appelle alors fonction génératrice de X la fonction $G_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$$

1. Montrer que G_X est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à n.
2. Donner l'expression de G_X lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, $X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1, n]\!]\right)$.
3. Si Y est une VARD finie à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, montrer que :

$$X \overset{(\mathscr{L})}{=} Y \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = G_Y(t)$$

4. Etablir que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

5. Montrer que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$, et que $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2$.

Exercice 13 (Entropie d'une VARD finie)
Dans le cadre des variables discrètes finies, la notion d'entropie (de Shannon) s'introduit simplement. Elle donne une mesure de la quantité minimale d'information nécessaire pour "coder" le résultat d'une variable aléatoire X. C'est une notion très utilisée en théorie de l'information.

On se donne X une variable discrète finie à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et, pour tout $k \in [[1; n]]$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$. On appelle alors entropie de X le réel :

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k) = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \ln\left(\mathbb{P}(X = x)\right)$$

avec la convention $x \ln(x) = 0$ si $x = 0$.

1. (a) Montrer que si $x \geq 0$: $-x \ln(x) \leq 1 - x$.
   (b) Si $n = \text{ Card }\left(X(\Omega)\right)$, montrer que $0 \leq H(X) \leq \ln(n)$.
2. Montrer que $H(X) = 0$ si, et seulement si, X est constante.
3. On pose $n = \text{ Card }\left(X(\Omega)\right)$. Alors :

$$H(X) = \ln(n) \Longleftrightarrow X \hookrightarrow \mathscr{U}([[1; n]])$$